Наталія КУГАЙ

Микола КАЛІНІЧЕНКО

ЧИСЛОВІ СИСТЕМИ

(практикум)

Міністерство освіти і науки України

Глухівський національний педагогічний університет
імені Олександра Довженка

Наталія КУГАЙ

Микола КАЛІНІЧЕНКО

ЧИСЛОВІ СИСТЕМИ
(практикум)

Навчально-методичний посібник

Глухів-2025

УДК 511.11(075.8)
К 88

Рекомендовано до друку та розповсюдження вченою радою Глухівського національного педагогічного університету імені Олександра Довженка (протокол N 2 від 24 вересня 2025 р.)

Рецензенти:

ГОДОВАНЮК Тетяна – доктор педагогічних наук, професор, проректор з наукової роботи, професор кафедри вищої математики та методики навчання математики Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини

БУРЧАК Станіслав – доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри професійної освіти й комп’ютерних технологій Глухівського національного педагогічного університету імені Олександра Довженка

К 88 **Кугай Н. В., Калініченко М. М.**
Числові системи (практикум) : навчально-методичний посібник. Глухів, 2025. 79 с.
ISBN 978-966-376-132-9

Розглянуто задачі з основних розділів числових систем (множини натуральних, цілих, раціональних, ірраціональних, дійсних, комплексних чисел, алгебри кватерніонів) Значну увагу приділено взаємозв’язкам навчальної дисципліни «Числові системи» та шкільного курсу математики.

Для зручності користування матеріал посібника розбито за темами, на початку кожної з яких вміщено короткий виклад основних теоретичних положень, подано приклади розв'язування задач з теми заняття (навчальні завдання) та запропоновано завдання для аудиторної та самостійної роботи, додаткові завдання. Після кожного змістового модуля запропоновано домашню самостійну роботу.

Для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «Бакалавр» освітньо-професійних програм «Середня освіта (Математика та інформатика)», «Середня освіта (Інформатика)»; вчителям і викладачам математики різних закладів освіти.

УДК 511.11(075.8)

ISBN 978-966-376-132-9

© Кугай Наталія, Калініченко Микола, 2025
© Глухівський НПУ ім. О. Довженка, 2025

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Пропонований навчально-методичний посібник є продовженням нашого попереднього посібника «Числові системи» [8] і має аналогічно структуру. Матеріал структуровано за чотирма змістовими модулями, а кожен модуль представлено окремими темами, всього таких тем 9. До кожної теми наведено перелік теоретичних запитань, список літератури, коротко представлено основні теоретичні відомості цієї теми, навчальні завдання (показано розв'язання ключових задач теми), завдання для аудиторної роботи, завдання для самостійної роботи, додаткові завдання (як правило, це завдання методологічного характеру і завдання, які демонструють зв'язки дисципліни «Числові системи» зі шкільним курсом математики). Після вивчення кожного змістового модуля пропонується домашня самостійна робота за варіантами (для кожного завдання запропоновано 20 варіантів). Ці завдання або аналогічні до них можна використати й для контрольних робіт.

Під час підготовки цього навчально-методичного посібника враховано досвід викладання дисципліни «Числові системи» майбутнім учителям математики й інформатики упродовж останніх тринадцяти років та навчально-методичну літературу, список якої подано наприкінці посібника. Особливий акцент зроблено на взаємозв'язках навчальної дисципліни «Числові системи» та шкільного курсу математики.

Посібник розроблено для підготовки до практичних занять і самостійної роботи здобувачів освіти з числових систем. Він може бути корисним також вчителям, викладачам математики різних закладів освіти.

Сподіваємося, що цей посібник стане надійним супутником для тих, хто бажає поглибити свої знання в галузі математики, та сприятиме розвитку вашого інтересу до цього захоплюючого предмета.

З найкращими побажаннями, Автори

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

Тема 1.1. Елементи теорії множин і математичної логіки

Теоретичні питання

1. Поняття множини. Способи задання множин
2. Рівність множин. Включення множин
3. Операції над множинами та їхні властивості
4. Декартів добуток множин
5. Висловлення. Операції над висловленнями
6. Предикати. Операції над предикатами. Квантори

Література:

1. Вивальнюк Л. М., Григоренко В. К., Левіщенко С. С. Числові системи. К. : Вища школа, 1988. 272 с. С. 3-5
2. Кугай Н. В., Калініченко М. М. Числові системи : навчальний посібник. Видання друге, перероблене, виправлене й доповнене. Глухів, 2024. 123 с. С. 7-19
3. Лиман Ф. М. Числові системи. Навчальний посібник Суми : Видавництво "МакДен", 2010. 192 с.
4. Безущак, О. О., Ганюшкін О. Г. Математична логіка: навч. посіб. К. : ВПЦ "Київський університет". 2023. 143 с. С. 7-13, 47-65.
5. Кугай Н. В. Методологічні знання майбутнього вчителя математики : монографія. Харків: ФОП Панов А. М., 2017. 336 с.
6. Кугай Н.В., Калініченко М.М. Підготовка майбутніх учителів математики: методологічний аспект : монографія. Харків, 2020. 522 с.

Основні теоретичні факти

Елементи теорії множин	
Поняття *множини* є неозначуваним поняттям, синонімами якого є сукупність, клас.	
Є 2 основних *способи задання* множин: переліком елементів; за допомогою характеристичної властивості.	$A=\{5;10;15\}$ $A=\{x \mid x\in N,\ x<10,\ x\vdots 3\}$
Множини називаються *рівними*, якщо вони складаються з однакових елементів.	$A=B$
Множина A називається *підмножиною* множини B, якщо всі елементи множини A належать множині B.	$A\subset B$
Об'єднанням множин A і B називається множина	

С, яка складається з усіх елементів, які належать хоча б одній із множин *A* або *B*.	$A\cup B=\{x \mid x\in A\vee x\in B\}$
Перетином множин *A* і *B* називається така множина *C*, яка складається тільки з тих елементів, які належать і множині *A*, і множині *B*.	$A\cap B=\{x \mid x\in A\wedge x\in B\}$
Різницею множини *A* і *B* називається така множина *C*, яка складається з усіх елементів, які належать множині *A*, але не належать множині *B*.	$A\setminus B=\{x \mid x\in A\wedge x\notin B\}$
Симетричною різницею A і *B* називається множина *C*, яка складається з усіх елементів, які належать множині *A* і не належать *B*, або які належать множині *B* і не належать *A*.	$A\Delta B=A\setminus B\cup B\setminus A$
Якщо *B* – підмножина множини *A*, то різницю множин *A* і *B* називають *доповненням* множини *B* до множини *A*.	$\overline{B}_A=A\setminus B$
Декартів добуток множин *A* і *B* – це така множина *C*, яка складається з усіх пар (*x*; *y*), де *x* належить множині *A* , а *y* – множині B.	$A\times B=\{(x;y) \mid x\in A,\ y\in B\}$
Властивості операцій над множинами	
1.*Комутативність* об’єднання і перетину	$A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A$
2.*Асоціативність* об’єднання і перетину	$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
3.*Дистрибутивність* об’єднання відносно перетину і перетину відносно об’єднання	$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$
4. Закони ідемпотентності	$A\cup A=A,\ A\cap A=A$
5. Властивості для порожньої й універсальної множин	$A\cup\varnothing=A,\ A\cap\varnothing=\varnothing$ $A\cup U=A,\ A\cap U=A$
6. Зв'язок різниці множин з перетином	$A\setminus B=A\cap\overline{B}$
Окремі властивості декартового добутку	
1.Декартів добуток множин *A* та *B* не є комутативним 2.Кількість елементів у декартовому добутку двох скінченних множин дорівнює добутку кількості елементів в кожній з них.	$\forall A,B,A\neq B,A\neq\varnothing,B\neq\varnothing$ $A\times B\neq B\times A$ $n(A)=k,n(B)=m,$ $n(A\times B)=km$

<table>
<tr><th colspan="2">Елементи математичної логіки</th></tr>
<tr><td colspan="2">Висловлення – основне, неозначуване поняття алгебри висловлень. Під висловленням розуміють таке розповідне речення, про яке можна говорити, що воно істинне або хибне</td></tr>
<tr><td>Заперечення висловлення A
Позначення: $\overline{A}$.</td><td>
<table>
<tr><td>A</td><td>$\overline{A}$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Диз’юнкція двох висловлень A та B
Позначення: $A \vee B$</td><td>
<table>
<tr><td>A</td><td>B</td><td>$A \vee B$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Кон’юнкція двох висловлень A та B
Позначення: $A \wedge B$</td><td>
<table>
<tr><td>A</td><td>B</td><td>$A \wedge B$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Імплікація двох висловлень A та B
Позначення: $A \Rightarrow B$</td><td>
<table>
<tr><td>A</td><td>B</td><td>$A \Rightarrow B$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Еквіваленція двох висловлень A та BПозначення:
$A \Leftrightarrow B$</td><td>
<table>
<tr><td>A</td><td>B</td><td>$A \Leftrightarrow B$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">n-місним предикатом, заданим на множині A, називається речення, яке містить n змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ і яке перетворюється у висловлення, якщо замість цих змінних підставити конкретні їхні значення $(a_1, a_2, ..., a_n) \in A$.</td></tr>
<tr><td>Квантор загальності</td><td>$\forall x_i \; P(x_1, x_2, ..., x_n)$</td></tr>
<tr><td>Квантор існування</td><td>$\exists x_i \; P(x_1, x_2, ..., x_n)$</td></tr>
</table>

Навчальні завдання

✍ Приклад 1.Зобразіть на координатній прямій множини A та B, їхні об’єднання, перетин, різниці та симетричну різницю, якщо

$$A = \{x \mid x \in R, |2x+4| \geq 3\},\ B = \{x \mid x \in R, 1-3x < 2\}.$$

○ Зобразимо на координатній площині множину $A = \{x \mid x \in R, |2x+4| \geq 3\}$.

Для цього розв'яжемо нерівність: $|2x+4| \geq 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+4 \geq 3, \\ 2x+4 \leq -3. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq -\dfrac{1}{2}, \\ x \leq -\dfrac{7}{2}. \end{array}\right.$

Зобразимо розв'язок нерівності на координатній прямій і запишемо аналітично множину A:

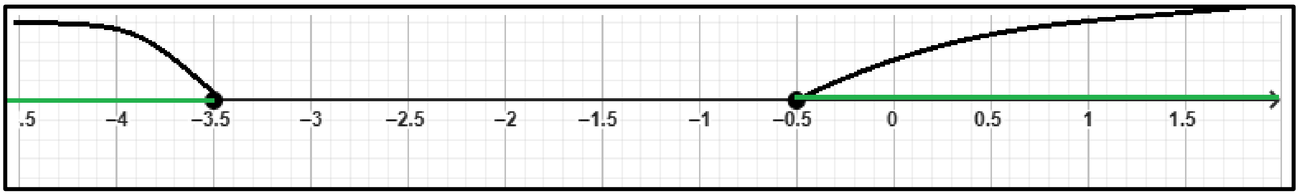


Рис. 1.1.1. $A = \left(-\infty; -\dfrac{7}{2}\right] \cup \left[-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$

Зобразимо на координатній прямій множину B, для цього розв'яжемо нерівність: $1-3x < 2 \Leftrightarrow -3x < 1 \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{3}$. Зобразимо множину B і запишемо її аналітично (рис. 1.1.2).

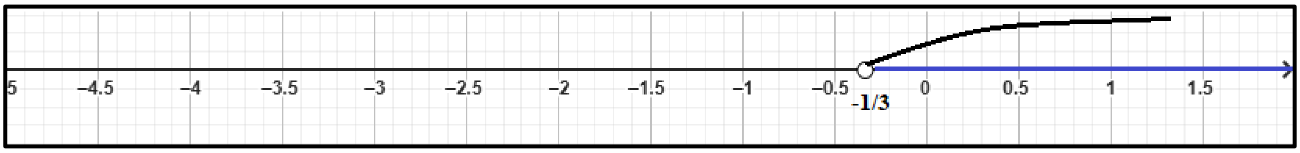


Рис. 1.1.2. $B = \left(-\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$

Тепер зобразимо на координатній прямій:

1) об'єднання множин A та B

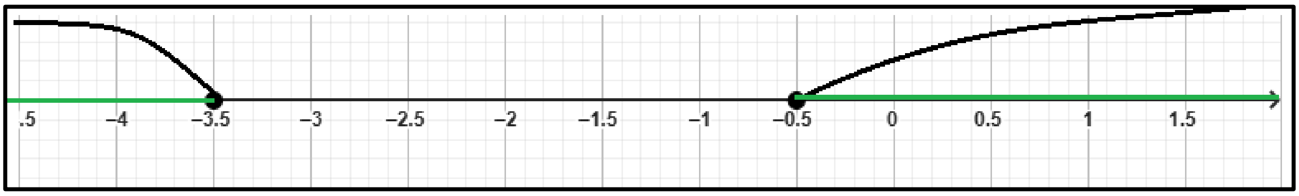


Рис. 1.1.3. $A \cup B = \left(-\infty; -\dfrac{7}{2}\right] \cup \left[-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$

2) перетин множин A та B

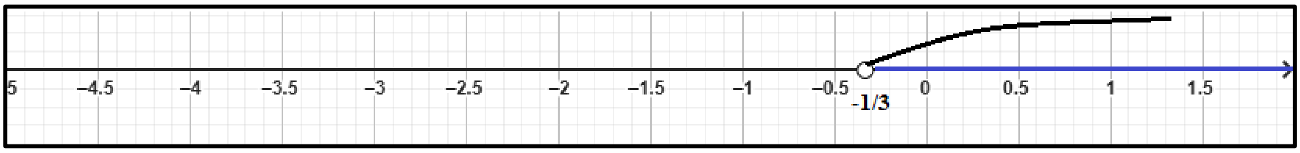


Рис. 1.1.4. $A \cap B = \left(-\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$

3) різницю A та B

Рис. 1.1.5. $A \setminus B = \left(-\infty; -\frac{7}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right]$

4) різницю B та A: $B \setminus A = \varnothing$

5) симетричну різниця A та B

Рис. 1.1.6. $A \Delta B = \left(-\infty; -\frac{7}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right]$

✍ <u>Приклад 2.</u> Зобразіть на координатній площині $A \times B$ і $B \times A$, якщо:
а) $A = \{x \mid x \in R, x \le 3\}$, $B = \{y \mid y \in N, y \le 2\}$;
б) $A = \{x \mid x \in R, -1 \le x \le 3\}$, $B = \{y \mid y \in R, -2 \le y \le 2\}$.

○ а) Зобразимо на координатній площині $A \times B$. Множина A складається з усіх дійсних чисел, які менші або дорівнюють 3, множина B складається лише з 2-х елементів $\{1; 2\}$. Тоді декартів добуток $A \times B$ – це множина точок координатної площини, для яких абсциса $x \le 3$, а ордината y може бути 1 або 2. Отримуємо два горизонтальних промені (рис. 1.1.7).

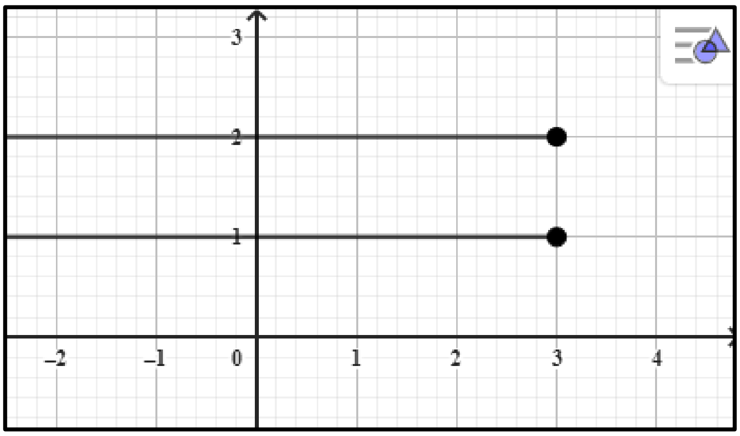


Рис. 1.1.7. Декартів добуток $A \times B$

Зобразимо на координатній площині $B \times A$. Тепер абсциса x може бути 1 або 2, а ордината $y \le 3$ (рис. 1.1.8).

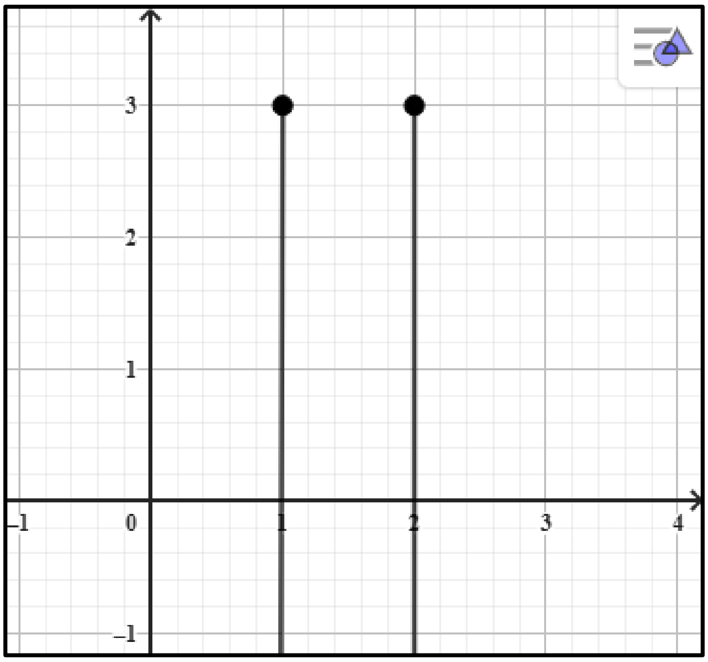


Рис. 1.1.8. Декартів добуток $B \times A$

б) До декартового добутку $A \times B$ належать всі ті точки, у яких абсциса x змінюється від – 1 до 3 (вертикальна полоса), а ордината y – від – 2 до 2 (горизонтальна полоса). Тоді $A \times B$ – це ті точки, які належать обом полосам (на рис. 1.1.9 – плоский квадрат *ABCD*).

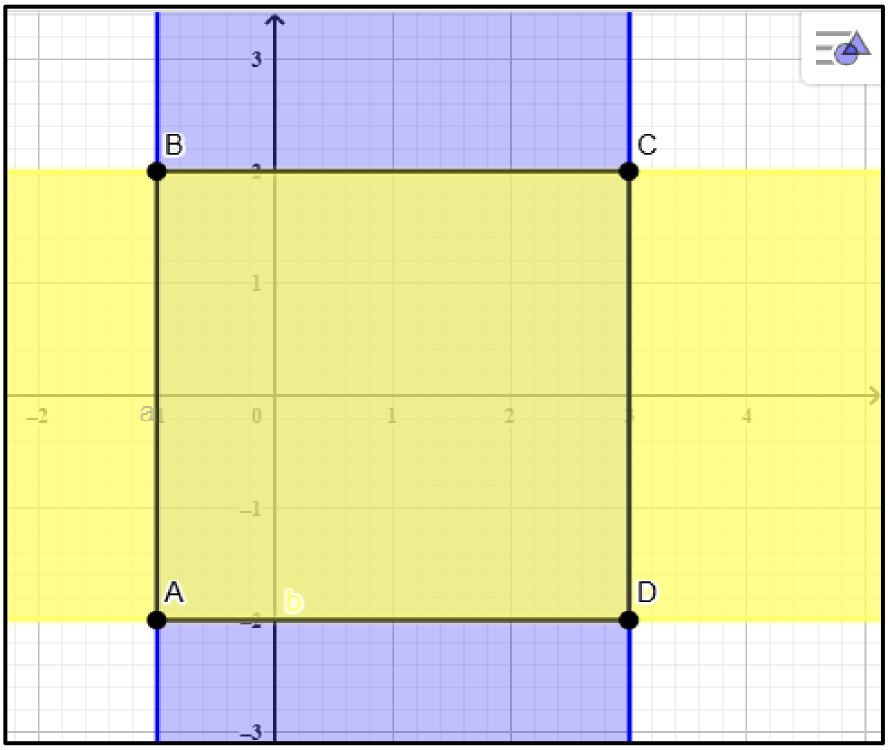


Рис. 1.1.9. Декартів добуток $A \times B$

Аналогічно побудуємо декартів добуток $B \times A$ (рис. 1.1.10 – плоский квадрат *ABCD*).

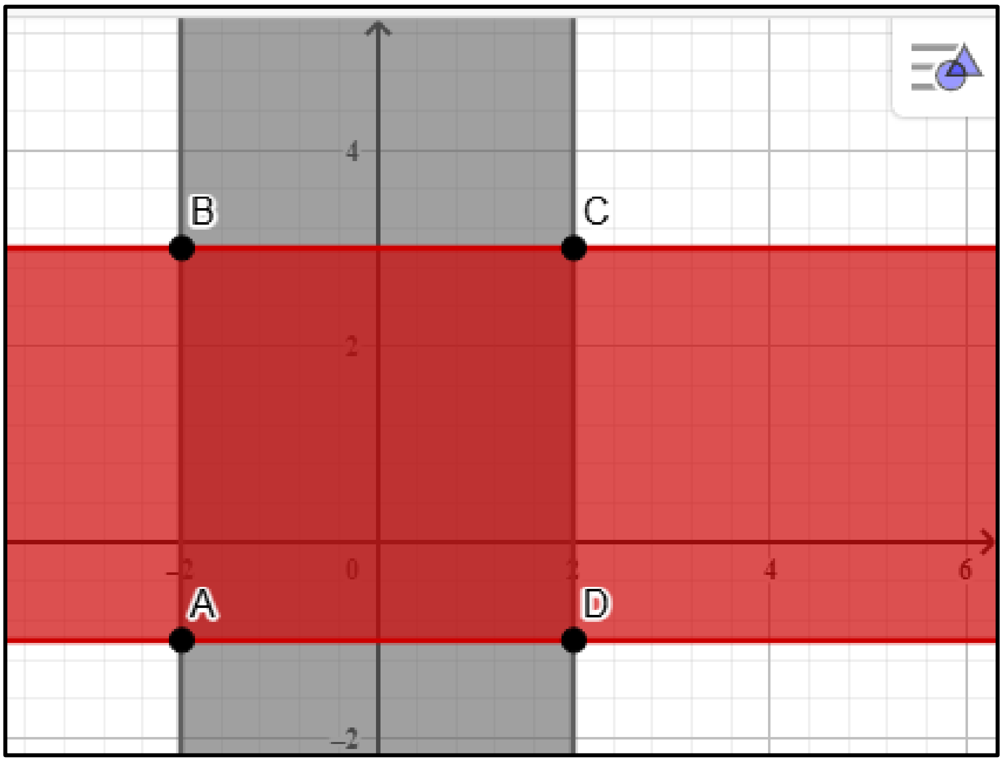


Рис. 1.1.10. Декартів добуток $B \times A$

✍Приклад 3. Запишіть у символьній формі твердження і вкажіть їхню істинність: а) всі натуральні числа більші нуля; б) для цілих чисел виконується асоціативний закон множення; в) рівняння $x^2 = 1$ має єдиний розв'язок на множині цілих чисел.

○ а) використаємо квантор загальності (маємо слово «всі»): $\forall n \in N \; n > 0$ – висловлення істинне; б) оскільки мова йде про *всі* цілі числа, то також використаємо квантор загальності. Асоціативний закон множення стосується довільної трійки цілих чисел: $\forall a,b,c \in Z \; a(bc) = (ab)c$ – висловлення істинне; в) для словосполучення «існує єдиний» маємо знак $\exists!$. Тоді $\exists! x \in Z \; x^2 = 1$ – висловлення хибне (поясніть, чому?).

✍Приклад 4. Запишіть українською мовою: а) $\forall n \in N \; (10^n - 4^n + 3n) \vdots 9$; б) $\forall a,b \in N \; \left(a + b = b + a\right)$; в) $\forall a \in N \; \forall b \in N \; \exists k \in N \; \left(a = b + k\right)$.

○ а) для будь-яких натуральних чисел вираз $10^n - 4^n + 3n$ кратний 9-ти; б) для всіх натуральних чисел виконується комутативний закон додавання; в) для будь-яких натуральних чисел *a* та *b* знайдеться таке натуральне число *k*, що $a = b + k$.

Завдання для аудиторної роботи

✍№ 1. Зобразіть на координатній прямій множину A та множину B, їхні перетин, об'єднання, різниці та симетричну різницю, якщо:

а) $A=\left\{x\in Z\,\middle|\,|2x-1|>\frac{1}{2}\right\}$, $B=\left\{x\in R\,\middle|\,-3x+4\le\frac{1}{3}\right\}$;

б) $A=\left\{x\in R\,\middle|\,27x^3+9x^2-48x+20=0\right\}$, $B=\left\{x\in R\,\middle|\,4x^4-16x^3+3x^2+4x-1=0\right\}$;

в) $A=\left\{x\in R\,\middle|\,\lg 10^{\lg\left(x^2+21\right)}>1+\lg x\right\}$, $B=\left\{x\in R\,\middle|\,5^{2x+1}\ge 5^x+4\right\}$;

г) $A=\left\{x\in R\,\middle|\,\frac{1}{2-x}+\frac{5}{2+x}<1\right\}$, $B=\left\{x\in R\,\middle|\,\frac{3x^2-16x+21}{\log_{0,3}\left(x^2+4\right)}<0\right\}$.

✍№2. Зобразіть на координатній площині $A\times B$ та $B\times A$, якщо:

а) $A=\left\{x\in R\,\middle|\,|x-3|\le 4\right\}$ та $B=\left\{y\in R\,\middle|\,|y|\le 1\right\}$;

б) $A=\left\{x\in R\,\middle|\,x^2+x\ge 0\right\}$ та $B=\left\{y\in N\,\middle|\,y\le 10, y\,\vdots\,3\right\}$;

в) $A=\left\{x\in R\,\middle|\,\left|-x+\frac{1}{3}\right|>1\right\}$ та $B=\left\{y\in R\,\middle|\,|y|+|y+1|\le 3\right\}$.

✍№ 3. Запишіть у символьній формі твердження і вкажіть їхню істинність: а) множина натуральних чисел є підмножиною множини цілих чисел; б) різниця будь-яких цілих чисел є число ціле; в) нерівність $2^x<8$ має натуральні розв'язки.

✍№ 4. Запишіть українською мовою твердження і вкажіть їхню істинність: а) $\forall a\in Z\ \exists k\in N\ \exists l\in N\ \ (a=k-l)$; б) $\sqrt{2}\in N$; в) $\forall a\in R\ \forall b\in R\ (a\ne b\Rightarrow a>b\vee b>a)$.

Завдання для самостійної роботи

✍№1. Зобразіть на координатній прямій множини A та B, їхній перетин, об'єднання, різниці та симетричну різницю, якщо:

а) $A=\left\{x\,\middle|\,x\in R,(x+3)^4+(x+5)^4=16\right\}$,

$B=\left\{x\,\middle|\,x\in R,\left(x^3+x^{-3}\right)+\left(x^2+x^{-2}\right)+\left(x+x^{-1}\right)=6\right\}$;

б) $A=\left\{x\,\middle|\,x\in R,|x+1|\le 3\right\}$, $B=\left\{x\,\middle|\,x\in N, x<10, x\,\vdots\,3\right\}$.

✍№2. Зобразіть на координатній площині $A\times B$ та $B\times A$, якщо:

а) $A=\left\{x\,\middle|\,x\in N, 2^x\le 2^{5+3x}\right\}$, $B=\left\{x\,\middle|\,x\in Z,\log_x(x+1)>2\right\}$;

б) $A=\left\{x \,\middle|\, x\in R, \cos x<\frac{1}{2}\right\}$, $B=\left\{x \,\middle|\, x\in Z, |x|\le x\right\}$.

✍№ 3. Запишіть у символьній формі твердження і вкажіть їхню істинність: а) множина натуральних чисел є підмножиною множини раціональних чисел; б) частка будь-яких цілих чисел є число ціле; в) нерівність $2^x<8$ має єдиний натуральний розв'язок.

✍№ 4. Запишіть українською мовою: а) $\forall a\in Z\ \exists k\in N\ \exists l\in N \quad (a=k+l)$; б) $\sqrt{6}\in R$; в) $\forall a\in R\ \forall b\in R\ (a\ne b\vee a>b\vee b>a)$.

Додаткові завдання

✍ № 1. Чи завжди існує перетин двох множин? А об'єднання? Відповідь обґрунтуйте.

✍ № 2. Що можна сказати про множини *A* та *B*, якщо:

а) декартів добуток цих множин містить елементи вигляду $(x; x)$;

б) декартів добуток цих множин не містить елементів вигляду $(x; x)$;

в) декартів добуток цих множин містить 7 елементів?

✍№ 3. Використовуючи теорему «$A=B \Leftrightarrow A\subset B\wedge B\subset A$», доведіть властивості операцій над множинами (див. Основні теоретичні факти).

✍№ 4. Нехай $P(x,y)$ – двомісний предикат. Що можна сказати про записи: а) $\exists x\, P(x,y)$; б) $\forall y\, P(x,y)$; в) $\exists x\, \forall y\, P(x,y)$?

✍ № 5. *Проєкт.* Проаналізуйте навчальні програми з математики (https://mon.gov.ua/) для 5-9 класів і з'ясуйте: чи використовується термінологія з теми «Елементи теорії множин», з теми «Елементи математичної логіки»? А чи вивчаються елементи теорії множин, елементи математичної логіки в шкільному курсі математики (5-9 класи)? Якщо так, то вкажіть в якому класі, під час вивчення якої теми, наведіть приклади.

Відповіді: *Завдання для аудиторної роботи.* **№1**. а) $A=Z$, $B=\left[\frac{11}{9};+\infty\right)$; б) $A=\left\{-\frac{5}{3};\frac{2}{3}\right\}$, $B=\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2};2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right\}$; в) $A=(0;3)\cup(7;+\infty)$, $B=[0;+\infty)$. **№2**. а) $A=[-1;7]$, $B=[-1;1]$, декартів добуток – прямокутник; б) $A=(-\infty;-1]\cup[0;+\infty)$, $B=\{3;6;9\}$, декартів добуток – промені.

Завдання для самостійної роботи. **№1**. а) $A=\{-3;-5\}$, $B=\{1\}$; б) $A=[-4;2]$, $B=\{3;6;9\}$. **№2**. а) $A=N$, $B=\varnothing$; б) $A=\left(\frac{\pi}{3}+2\pi m;\frac{5\pi}{3}+2\pi m\right)$, $m\in Z$, $B=\{0;1;2;...\}$.

Тема 1.2. Бінарні відношення. Алгебраїчні операції. Упорядковані множини, групи, кільця, поля

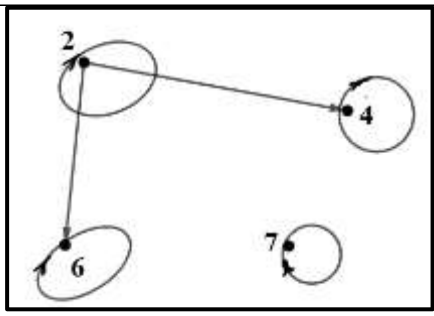
Теоретичні питання

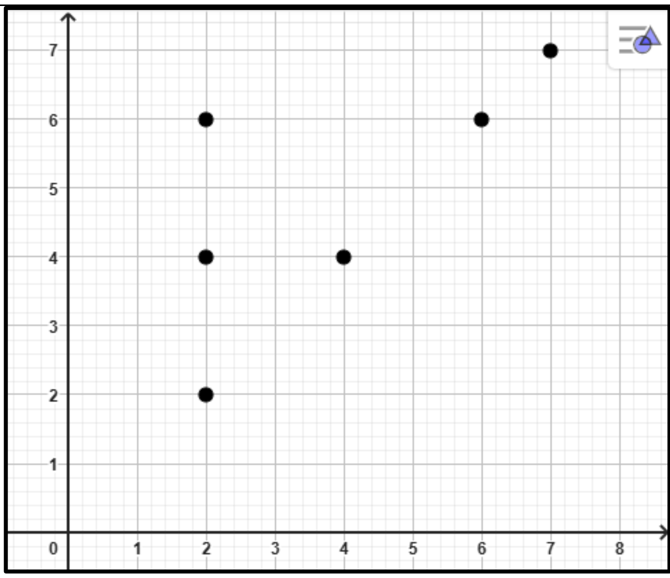
1. Бінарні відношення, їхні властивості.
2. Відношення порядку.
3. Відношення еквівалентності.
4. Алгебраїчні операції, їхні властивості.
5. Упорядковані алгебраїчні структури.

Література:

1. Вивальнюк Л. М., Григоренко В. К., Левіщенко С. С. Числові системи. К. : Вища школа, 1988. 272 с. С. 5-45
2. Кугай Н. В., Калініченко М. М. Числові системи : навчальний посібник. Видання друге, пероероблене, виправлене й доповнене. Глухів, 2024. 123 с. С. 22-48
3. Лиман Ф. М. Числові системи. Навчальний посібник Суми : Видавництво "МакДен", 2010. 192 с.

Основні теоретичні факти

<table>
<tr><td colspan="2">Упорядковану трійку (A,B,G), де $G \subset A \times B$, називають бінарною відповідністю між елементами множин A і B.
Якщо $A = B$, то бінарну відповідність називають бінарним відношенням, визначеним на множині A.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Основні способи задання бінарних відношень</td></tr>
<tr><td>Переліком елементів (якщо множина $G \subset A \times B$ – скінченна)</td><td>$A = \{2,4,6,7\}$
$G = \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,4),(6,6),(7,7)\}$</td></tr>
<tr><td>За допомогою графа відношення</td><td>
</td></tr>
<tr><td>За допомогою матриці відношення</td><td>
<table>
<tr><td></td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>7</td></tr>
<tr><td>2</td><td>×</td><td>×</td><td>×</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td>×</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

За допомогою графіка відношення (якщо множина A числова)	
Словесно	$A=\{2,4,6,7\}$ Перша компонента пари $(a,\ b)$ є дільником другої компоненти
Основні властивості бінарних відношень	
Бінарне відношення λ, визначене на множині M, називається:	
зв'язним, якщо $\forall a,b\in M\ a\lambda b\vee b\lambda a\vee a=b$	$(N;>)$
✓ *рефлексивним*, якщо $\forall a\in M\ a\lambda a$ ✓ *антирефлексивним*, якщо $\forall a\in M\ a\overline{\lambda}a$ ✓ *нерефлексивним*, якщо $\exists a\in M\ a\lambda a$ і $\exists b\in M\ b\overline{\lambda}b$	$(Z;(x-y)\vdots 2)$ $(N;y=5x)$ $(N;y=x^3)$
○ *симетричне*, якщо $\forall a,b\in M\ a\lambda b\Rightarrow b\lambda a$ ○ *несиметричним*, якщо $\forall a,b\in M\ a\lambda b\Rightarrow b\overline{\lambda}a$ ○ *антисиметричним*, якщо $\forall a,b\in M\ a\lambda b\wedge b\lambda a\Rightarrow a=b$	$(Z;(x-y)\vdots 2)$ $(N;y=x^3)$ $(N;\vdots)$
➢ *транзитивним*, якщо $\forall a,b,c\in M\ a\lambda b\wedge b\lambda c\Rightarrow a\lambda c$ ➢ нетранзитивним, якщо $\forall a,b,c\in M\ a\lambda b\wedge b\lambda c\Rightarrow a\overline{\lambda}c$ ➢ *антитранзитивним*, якщо існують трійки	$(N;\vdots)$ $(Z,\ y=x+2)$

елементів, для яких виконуються умова транзитивності і обов'язково існують трійки елементів, для яких виконується умова нетранзитивності	
▪ *функціональним*, якщо $\forall a \in M$ існує не більше одного елемента b, для якого $a\lambda b$; ▪ функцією, якщо $\forall a \in M$ існує <u>єдине</u> $b \in M$ таке, що $a\lambda b$	$\left(N; y = x^3\right)$
Відношення порядку	
Строгого лінійного порядку	нерефлексивне, несиметричне, транзитивне, зв'язне
Нестрогого лінійного порядку	рефлексивне, антисиметричне, транзитивне, зв'язне
Строгого часткового порядку	нерефлексивне, несиметричне, транзитивне, незв'язне
Нестрогого часткового порядку	рефлексивне, антисиметричне, транзитивне, незв'язне
Множина *A*, на якій задано відношення порядку, називається *упорядкованою* множиною. *Позначення* $(A, \succ)$.	$(R; >)$ – строго лінійно упорядкована множина
Якщо відношення є рефлексивним, транзитивним і симетричним, то його називають відношенням *еквівалентності*.	$(N; a = b(\mathrm{mod}\, n))$
Якщо на множині M задана бінарна функція (бінарне функціональне відношення), то її називають *унарною* алгебраїчною операцією на цій множині.	На множині цілих чисел знаходження протилежного числа
Якщо на множині M задана тернарна функція (тернарне функціональне відношення), то її називають *бінарною* алгебраїчною операцією на цій множині.	Додавання на множині цілих чисел є бінарною алгебраїчною операцією, ділення на цій множині – ні
Упорядковані алгебраїчні структури	
Алгебраїчну систему $(G, *, \succ)$ називають *упорядкованою півгрупою*, якщо:	$(N, +, >)$

1) алгебра (G, $*$) – півгрупа; 2) множина (G, $\succ$) упорядкована відношенням порядку $\succ$; 3) відношення $\succ$ монотонне відносно групової операції, тобто $\forall a,b,c \in G\ a \succ b \Rightarrow a*c \succ b*c \wedge c*a \succ c*b$)	
Алгебраїчну систему (K, +, $\cdot$, $\succ$) називають *упорядкованим півкільцем* (*кільцем, полем*), якщо виконуються умови: 1) алгебра (K, +, $\cdot$) – півкільце (кільце, поле); 2) алгебраїчна система (K, +, $\succ$) – лінійно і строго упорядкована півгрупа (група) з непорожньою множиною K^+ додатних елементів; 3) $(\forall a)$ $(\forall b)$ $(\forall c)$ $(a \succ b \wedge c \in K^+ \Rightarrow a \cdot c \succ b \cdot c \wedge c \cdot a \succ c \cdot b)$, $a, b, c \in K$. Множину K^+ називають множиною додатних елементів упорядкованого півкільця (кільця, поля) K, яка відповідає даному порядку.	(Z, +, $\cdot$, >)

Навчальні завдання

✍ Приклад 1. На множині $A = \{1,4,5,7\} \subset Z$ задано відношення α: $a\alpha b \Leftrightarrow (a-b)\vdots 3$. Задайте це відношення переліком елементів, за допомогою графа, графіка і таблиці.

○ Зауважимо, що число 0 є кратним числу 3; якщо $(a-b)\vdots 3$, то й $(b-a)\vdots 3$. Тоді $G = \{(1;1),(4;4),(5;5),(7;7),(1;4),(4;1),(1;7),(7;1),(4;7),(7;4)\}$. Побудуємо граф цього відношення (рис. 1.2.1).

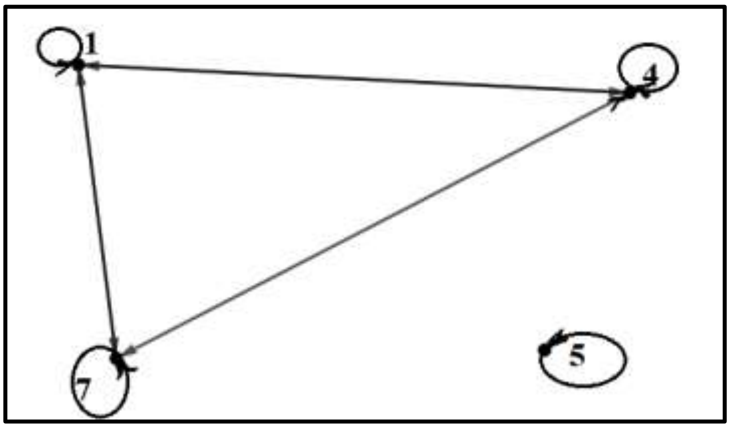


Рис. 1.2.1. Граф відношення

Побудуємо графік відношення (рис. 1.2.2).

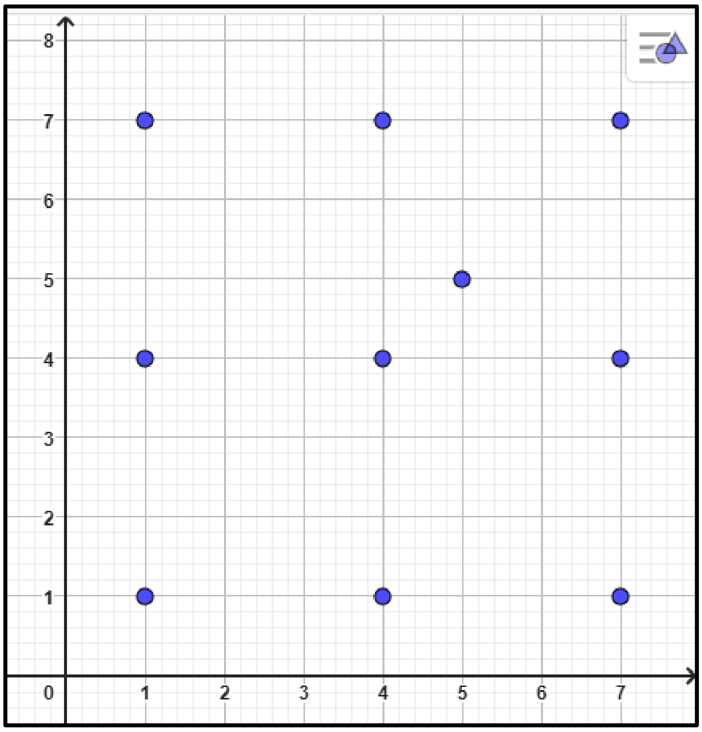


Рис. 1.2.2. Графік відношення

Таблиця 1.2.1.

Таблиця відношення

$(a-b)\vdots 3$	1	4	5	7
1	$\times$	$\times$		$\times$
4	$\times$	$\times$		$\times$
5			$\times$	
7	$\times$	$\times$		$\times$

✍ Приклад №2. Визначте властивості відношення подільності на множині N. Чи є це відношення відношенням порядку? Відношенням еквівалентності?

○ Нагадаємо, що $\forall a,b \in N \ (a \vdots b \Leftrightarrow \exists n \in N \ a = b \cdot n)$.

1) Незв'язне, оскільки можна вказати такі натуральні числа, які є різними, але не перебувають у відношенні подільності. Наприклад, $5 \neq 3 \wedge \overline{5 \vdots 3} \wedge \overline{3 \vdots 5}$.

2) Рефлексивне, бо $\forall a \in N \ a \vdots a$. Дійсно, $\exists n = 1 \in N \ a = a \cdot 1$.

3) Антисиметричне, бо $\forall a,b \in N \ a \vdots b \Rightarrow a = b \cdot n, n \in N$, $b \vdots a \Rightarrow b = a \cdot m, m \in N$. Підставимо $b = a \cdot m$ в перше твердження, отримаємо $a = (a \cdot m) \cdot n = a \cdot (n \cdot m) \Rightarrow n \cdot m = 1 \Rightarrow n = m = 1 \Rightarrow a = b$.

4) Транзитивним, бо $\forall a,b,c \in N$ виконується: $a \vdots b \Rightarrow a = b \cdot n, n \in N$, $b \vdots c \Rightarrow b = c \cdot m, m \in N$. Підставивши другу рівність в першу, отримаємо $a = (c \cdot m) \cdot n = c \cdot (m \cdot n), (m \cdot n) \in N \Rightarrow a \vdots c$.

5) Не є функція і не є функціональним, бо, наприклад, для числа 4 маємо, що $4 \vdots 1 \wedge 4 \vdots 2 \wedge 4 \vdots 4$.

Отже, відношення є незв'язним, рефлексивним, антисиметричним і транзитивним. Тому це відношення нестрогого часткового порядку. Не є відношенням еквівалентності.

✍ <u>Приклад №3.</u> Чи є бінарна операція ділення алгебраїчною на *N*?

○ Вказана операція не є алгебраїчною операцією на множині *N*, оскільки не є всюди визначеною, бо, наприклад, $3:4 = \frac{3}{4}$, а $\frac{3}{4}$ не належить множині *N*.

✍ <u>Приклад №4</u>. На множині дійсних чисел *R* введено операцію $\otimes$: $a \otimes b = a + b - ab$. Доведіть, що $(R, \otimes)$ є півгрупою.

○ Треба довести, що так введена операція є асоціативною: рівність $\forall a,b,c \;\; a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$. За означенням операції $\otimes$ маємо:

$$a \otimes (b \otimes c) = a \otimes (b + c - bc) = a + (b + c - bc) - a(b + c - bc) = a + b + c - bc - ab - $$
$$-ac + abc$$
$$(a \otimes b) \otimes c = (a + b - ab) \otimes c = (a + b - ab) + c - (a + b - ab)c = a + b + c - ab - ac -$$
$$-bc + abc$$

Отримали однакові вирази, тому операція асоціативна і вказана алгебра є півгрупою.

✍ <u>Приклад №5</u>. З'ясуйте, чи є алгебра $G = \{a + b\sqrt{7} \mid a,b \in Z\}$ кільцем відносно операцій додавання й множення.

○ Покажемо, що операції додавання й множення є алгебраїчними на вказаній множині. Розглянемо довільні *x* і *y* з множини *G*. Тоді $x = a + b\sqrt{7}$, $y = c + d\sqrt{7}$, де *a, b, c, d* – цілі числа. Розглянемо

$$x + y = (a + b\sqrt{7}) + (c + d\sqrt{7}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{7} \in G$$

$$xy = (a + b\sqrt{7})(c + d\sqrt{7}) = (ac + 7bd) + (ad + bc)\sqrt{7} \in G.$$

Отже, операції додавання й множення є алгебраїчними на вказаній множині.

Перевіримо, що операція додавання є асоціативною (використаємо властивості множення й додавання дійсних чисел):

$$\left(\left(a+b\sqrt{7}\right)+\left(c+d\sqrt{7}\right)\right)+\left(p+k\sqrt{7}\right)=\left((a+c+p)+(b+d+k)\cdot\sqrt{7}\right);$$

$$\left(a+b\sqrt{7}\right)+\left(\left(c+d\sqrt{7}\right)+\left(p+k\sqrt{7}\right)\right)=\left((a+c+p)+(b+d+k)\cdot\sqrt{7}\right).$$

У множині G $e=0+0\cdot\sqrt{7}$ – нейтральний елемент.

$\forall\left(a+b\sqrt{7}\right)\in G\ \exists\left(-a-b\sqrt{7}\right)\in \mathrm{G}:\left(a+b\sqrt{7}\right)+\left(-a-b\sqrt{7}\right)=0+0\sqrt{7}$.

Операція додавання комутативна (перевірте!).

Отже, $G=\left\{a+b\sqrt{7}\mid a,b\in Z\right\}$ є комутативною групою відносно додавання.

Покажемо, що операція множення є асоціативною:

$\left(a+b\sqrt{7}\right)\cdot\left(\left(c+d\sqrt{7}\right)\cdot\left(p+k\sqrt{7}\right)\right)=\left(\left(a+b\sqrt{7}\right)\cdot\left(c+d\sqrt{7}\right)\right)\cdot\left(p+k\sqrt{7}\right)$. Дійсно,

$$\left(a+b\sqrt{7}\right)\cdot\left(\left(c+d\sqrt{7}\right)\cdot\left(p+k\sqrt{7}\right)\right)=\left(a+b\sqrt{7}\right)\cdot\left(cp+ck\sqrt{7}+dp\sqrt{7}+7dk\right)=acp+$$
$$+ack\sqrt{7}+adp\sqrt{7}++7adk+bcp\sqrt{7}+7bck+7bdp+7\sqrt{7}bdk$$

$$\left(\left(a+b\sqrt{7}\right)\cdot\left(c+d\sqrt{7}\right)\right)\cdot\left(p+k\sqrt{7}\right)=\left(ac+ad\sqrt{7}+bc\sqrt{7}+7bd\right)\cdot\left(p+k\sqrt{7}\right)=acp+$$
$$+ack\sqrt{7}+adp\sqrt{7}++7adk+bcp\sqrt{7}+7bck+7bdp+7\sqrt{7}bdk$$

Аналогічно можна показати, що виконується дистрибутивний закон множення відносно додавання. У множині G $n=1+0\cdot\sqrt{7}$ – одиничний елемент. Отже, маємо кільце з одиницею.

Завдання для аудиторної роботи

✍ №1. На множині $A=\{1,4,5,7\}\subset Z$ задано відношення α: $a\alpha b\Leftrightarrow(a+b)\vdots 2$. Задайте це відношення переліком елементів, за допомогою графа, графіка і таблиці.

✍ №2. Визначте властивості відношень, заданих на вказаних множинах. Чи будуть ці відношення відношенням порядку? Відношенням еквівалентності? а) $\left(Z,(x-y)\vdots 2\right)$; б) $\left(N,\ y=x^2\right)$; в) $\left(R,|x|=|y|\right)$; г) $\left(C,\operatorname{Re}z_1=\operatorname{Re}z_2\right)$; д) $\left(N,\ y=x^3\right)$; е) $\left(N,\ x<y<x+2\right)$; є) $\left(Z,\ x=y^2\right)$.

✍ №3. Чи є алгебраїчною на вказаній множині бінарна операція? Відповідь обґрунтуйте:

а) ділення на множині Q;

б) множення на множині цілих чисел, не кратних 5;

в) перетин підмножин на булеані;

г) додавання матриць;

д) на множині натуральних чисел операція знаходження НСД;

е) на множині натуральних чисел операція знаходження спільного кратного.

✍ №4.З'ясуйте, чи утворюють півгрупу, групу множини з заданими на них операціями:

а) Множина $T_n(R)$ всіх невироджених матриць порядку n з дійсними елементами, які дорівнюють одиниці на головній діагоналі і нулю на всіх місцях над головною діагоналлю, відносно множення матриць;

б) Множина $UT_n(R)$ всіх матриць порядку n з дійсними елементами, які дорівнюють одиниці на головній діагоналі і нулю на всіх місцях під головною діагоналлю, відносно множення матриць.

✍ №5. Перевірте, чи буде множина $P(M)$ всіх підмножин множини M (булеан множин M) з операціями $A+B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$, $A\cdot B=A\cap B$, $A,B\in P(M)$, кільцем з одиницею.

Завдання для самостійної роботи

✍ №1. На множині $A=\{1,4,5,7\}\subset Z$ задано відношення α: $a\alpha b\Leftrightarrow(a-b)\vdots 2$. Задайте це відношення переліком елементів, за допомогою графа, графіка і таблиці.

✍ №2. Визначте властивості вказаних відношень. Чи будуть ці відношення відношенням порядку? Відношенням еквівалентності?

а) $(Z,(x-y)\vdots 4)$; б) $(N,y=5x)$; в) відношення паралельності на множині всіх прямих площини;в) відношення перпендикулярності на множині площин.

✍ №3. Чи є алгебраїчною бінарна операція

а) об'єднання підмножин на булеані;

б) множення матриць.

✍ №4.З'ясуйте, чи утворюють півгрупу, групу множини всіх матриць порядку n з дійсними елементами, які дорівнюють одиниці на допоміжній діагоналі і нулю над цією діагоналлю, відносно множення матриць.

Додаткові завдання

✍ № 1. Нехай R – множина дійсних чисел. Зобразіть на координатній площині геометричну фігуру, яка задається відношенням:

а) $\alpha=\{(x,y)\in R^2 \mid y=x\}$; б) $\alpha=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2\le 4\}$; в) $\alpha=\{(x,y)\in R^2 \mid y>x^2\}$. Чи будуть ці відношення функціями? Які цифрові засоби візуалізації тут доцільно застосувати?

✍ № 2. Заповніть таблицю знаками « + » і «–» залежно від того, чи має задане відношення у множині Z відповідну властивість (див. табл. 1.2.1).

Таблиця 1.2.1

Властивості відношення

Відношення	**Властивості відношення**							
	рефл	антирефл	симетр	антисим	транз	функ	порядок	еквівал
$y = x$								
$y < x$								
$y = x(\mathrm{mod}\,3)$								
$y \vdots x$								
$\lvert y\rvert = \lvert x\rvert$								
$\text{НСД}(x, y) = 1$								

✍ № 3. Наведіть приклад бінарного відношення, яке є: а) рефлексивним, симетричним, транзитивним; б) нерефлексивним, антисиметричним, транзитивним; в) відношенням нестрогого лінійного порядку; г) відношенням еквівалентності.

✍ № 4. Чи є наведені нижче відношення алгебраїчними операціями:

а) $\alpha = \left\{ (x, y, z) \in N^3 \middle| z - \text{спільний дільник } y \text{ і } x \right\}$;

б) $\alpha = \left\{ (x, y, z) \in N^3 \middle| z = \text{НСК}(x, y) \right\}$.

✍ № 5. Наведіть приклад: а) некомутативної операції; б) некомутативної й неасоціативної операції; б) неалгебраїчної операції; в) групи; г) кільця.

Проєкт. Проаналізуйте навчальні програми з математики (https://mon.gov.ua/) для 5-9 класів і з'ясуйте: які відношення вивчаються в ШКМ, які властивості вони мають; які операції вивчаються в ШКМ, чи є вони алгебраїчними, які властивості мають.

Відповіді: *Завдання для аудиторної роботи*. **№1**. $\{(1;5),(1;7),(5;7),(5;1),(7;1),(7;5)\}$. **№2**. а) рефлексивне, симетричне, транзитивне, відношення еквівалентності; б) нерефлексивне, несиметричне, анти транзитивне; е) анти рефлексивне, есиметричне, не транзитивне. **№3**. а) так, якщо виключити число 0; б) так; в) так; г) так; д) так; е) ні. **№4**. а) група; б) група.

Завдання для самостійної роботи. **№1**. $\{(1;5),(1;7),(5;7),(5;1),(7;1),(7;5)\}$. **№2**. а) рефлексивне, симетричне, транзитивне, відношення еквівалентності; б) антирефлексивне, несиметричне, нетранзитивне; в) рефлексивне, симетричне, транзитивне, відношення еквівалентності. **№3.** а) так; б) ні. **№4.** Не є півгрупою, не є групою для $n > 1$.

Самостійна робота № 1 за ЗМ «Основні поняття»

➢ **Завдання 1.** Зобразіть на координатній прямій множини *A* та *B*, їхні об'єднання, перетин, різниці та симетричну різницю, якщо:

1. $A=\left\{x \middle| x\in R, (x^2-1)(x^2-4x-5)=0\right\}, B=\left\{x \middle| x\in R, (x^2-1)^2+(x^2-4x-5)^2=0\right\}$;

2. $A=\left\{x \middle| x\in R, x^2-6x+8>0\right\}, B=\left\{x \middle| x\in R, x^2-4x-5<0\right\}$;

3. $A=\left\{x \middle| x\in R, (x^2-1)(x^2+2x-3)=0\right\}, B=\left\{x \middle| x\in R, (x^2-1)^2-(x^2-4x-5)^2=0\right\}$;

4. $A=\left\{x \middle| x\in R, x^2(x^2+2x-3)\ge 0\right\}, B=\left\{x \middle| x\in R, x(x^2-4x-5)^2\le 0\right\}$;

5. $A=\left\{x \middle| x\in R, (x^2-4)(x^2-x-2)=0\right\}, B=\left\{x \middle| x\in R, (x^2-4)^2+(x^2-x-2)^2=0\right\}$;

6. $A=\left\{x \middle| x\in R, x^2-6|x|+8>0\right\}, B=\left\{x \middle| x\in R, x^2-4|x|-5<0\right\}$;

7. $A=\left\{x \middle| x\in R, x^2+6x-40<0\right\}, B=\left\{x \middle| x\in R, x^2+3x-18\ge 0\right\}$;

8. $A=\left\{x \middle| x\in R, (x^2-9)(x^2-2x-3)=0\right\}, B=\left\{x \middle| x\in R, (x^2-9)^2-(x^2-2x-3)^2=0\right\}$

9. $A=\left\{x \middle| x\in R, (x^2-9)(x^2+4x+3)=0\right\}, B=\left\{x \middle| x\in R, (x^2-9)^2+(x^2+4x+3)^2=0\right\}$

10. $A=\left\{x \middle| x\in R, (x^2-1)(x^2+x)=0\right\}, B=\left\{x \middle| x\in R, (x^2-1)^2+(x^2+4x-5)^2=0\right\}$;

11. $A=\left\{x \middle| x\in R, -3x^2+16x+12\le 0\right\}, B=\left\{x \middle| x\in R, x^2-11x<0\right\}$;

12. $A=\left\{x \middle| x\in R, x^2-\left(\sqrt{7}-2\right)x-2\sqrt{7}\le 0\right\}$; $B=\left\{x \middle| x\in R, -x^2+4{,}8x+1>0\right\}$;

13. $A=\left\{x \middle| x\in R, x^2-x-6\ge 0\right\}, B=\left\{x \middle| x\in R, x^2-x-30<0\right\}$;

14. $A=\left\{x \middle| x\in R, (x-3)(x^2-x-6)=0\right\}, B=\left\{x \middle| x\in R, (x-3)^2+\left(x^2-x-6\right)^4=0\right\}$;

15. $A=\left\{x \middle| x\in R, x^2-4x-12\le 0\right\}, B=\left\{x \middle| x\in R, x^2-6x-7<0\right\}$;

16. $A=\left\{x \middle| x\in R, (x-6)\left(x^2-6x\right)^2=0\right\}, B=\left\{x \middle| x\in R, (x-6)^2-\left(x^2-4x-12\right)^2=0\right\}$;

17. $A=\left\{x \middle| x\in R, x^2+\left(\sqrt{11}-3\right)x-3\sqrt{11}\le 0\right\}, B=\left\{x \middle| x\in R, -x^2-1{,}5x+7>0\right\}$;

18. $A=\left\{x \middle| x\in R, (x-6)^2\left(x^2-6x\right)<0\right\}, B=\left\{x \middle| x\in R, (x-6)^2+\left(x^2-4x-12\right)^2=0\right\}$;

19. $A=\left\{x \middle| x\in R, (x-6)^2\left(x^2-6|x|\right)>0\right\}, B=\left\{x \middle| x\in R, (x-6)^2+\left(x^2-6|x|\right)^2=0\right\}$;

20. $A=\left\{x \middle| x\in R, (x^2+9)\left(x^2+x-12\right)\le 0\right\}, B=\left\{x \middle| x\in R, (x+4)^2\left(x^2+x-12\right)\le 0\right\}$.

➢ **Завдання 2**. Зобразіть на координатній площині $A\times B$ і $B\times A$, якщо:

1. $A=\left\{x\middle|x\in Z, 8\cdot 2^{x^2+6x}<0.25\right\}$, $B=\left\{x\middle|x\in R, \log_{0.7}\left(3x-5\right)>\log_{0.7}\left(x+1\right)\right\}$;

2. $A=\left\{x\middle|x\in N, (0.4)^{\frac{x^2-4}{x}}\le\frac{125}{8}\right\}$, $B=\left\{x\middle|x\in R, \log_5\left(4x-3\right)>\log_5\left(3-2x\right)\right\}$;

3. $A=\left\{x\middle|x\in N, (0.2)^{x-2}\le 5\cdot\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{x}}\right\}$, $B=\left\{x\middle|x\in R, \log_3\left(\frac{2-3x}{x}\right)\ge -1\right\}$;

4. $A=\left\{x\middle|x\in R, \left(\frac{\pi}{3}\right)^{2-\frac{x-3}{x+2}}\le\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{x-2}{x+1}}\right\}$, $B=\left\{x\middle|x\in N, \log_{\frac{1}{6}}\left(x+4\right)<\log_{\frac{1}{6}}\left(2x-2\right)\right\}$;

5. $A=\left\{x\middle|x\in Z, \left(10^{x-5}\right)^{x-6}\le 100\right\}$, $B=\left\{x\middle|x\in R, \log_5\left(5x-1\right)<\log_5\left(2-3x\right)\right\}$;

6. $A=\left\{x\middle|x\in Z, \left(\frac{3}{2}\right)^{1-2x}\ge\left(\frac{8}{27}\right)^{x+3}\right\}$, $B=\left\{x\middle|x\in R, \log_{0.5}\left(7x+8\right)<\log_{0.5}\left(2-5x\right)\right\}$;

7. $A=\left\{x\middle|x\in Z, \left(\frac{4}{5}\right)^{x}\cdot\left(\frac{35}{12}\right)^{x}\le\frac{9}{49}\right\}$, $B=\left\{x\middle|x\in R, \log_2\left(x-2\right)<\log_2\left(2-3x\right)\right\}$;

8. $A=\left\{x\middle|x\in N, (0.1)^{x}\ge 0.001\right\}$, $B=\left\{x\middle|x\in R, \log_{0.5}\left(5x-1\right)<\log_{0.5}\left(2-3x\right)\right\}$;

9. $A=\left\{x\middle|x\in Z, \left(\frac{3}{7}\right)^{x^2}\ge\left(\frac{7}{3}\right)^{4x-21}\right\}$, $B=\left\{x\middle|x\in N, \log_{\frac{1}{2}}\left(x+4\right)<\log_{\frac{1}{2}}\left(2x-2\right)\right\}$;

10. $A=\left\{x\middle|x\in Z, (1.3)^{\frac{x^2-9x-10}{x}}\le 1\right\}$, $B=\left\{x\middle|x\in R, \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2-3x}{x}\right)\le 1\right\}$;

11. $A=\left\{x\middle|x\in R, 4\cdot\left(0.5\right)^{x(x+3)}<0.25^{2x}\right\}$, $B=\left\{x\middle|x\in R, \log_3\left(x+2\right)<\log_3\left(2-3x\right)\right\}$;

12. $A=\left\{x\middle|x\in R, \left(0.3\right)^{\frac{x^2-8}{x}}\ge 11\frac{1}{9}\right\}$, $B=\left\{x\middle|x\in R, \log_{0.5}\left(4x-3\right)<\log_{0.5}\left(3-2x\right)\right\}$;

13. $A=\left\{x\middle|x\in R, 2\cdot 8^{\frac{1}{x}}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}\right\}$, $B=\left\{x\middle|x\in R, \log_5\left(4x+3\right)<\log_5\left(3+2x\right)\right\}$;

14. $A=\left\{x\middle|x\in R, \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1+\frac{4}{x+2}}\ge\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{9}{x+3}}\right\}$, $B=\left\{x\middle|x\in R, \log_7\left(7x+8\right)<\log_7\left(2-5x\right)\right\}$;

15. $A=\left\{x\middle|x\in N, (0.2)^{x}\ge 0.008\right\}$, $B=\left\{x\middle|x\in R, \log_5\left(5x-1\right)>\log_5\left(2+3x\right)\right\}$;

16. $A=\left\{x \middle| x\in Z, \left(\frac{2}{5}\right)^{x^2} \geq \left(\frac{5}{2}\right)^{4x-21}\right\}$, $B=\left\{x \middle| x\in N, \log_2(x+4) > \log_2(2x-2)\right\}$;

17. $A=\left\{x \middle| x\in Z, (2.3)^{\frac{x^2+9x-10}{x}} \leq 1\right\}$, $B=\left\{x \middle| x\in R, \log_3\left(\frac{2-3x}{x}\right)\geq 1\right\}$;

18. $A=\left\{x \middle| x\in R, (0.2)^{x+2} \leq 5\cdot(25)^{-\frac{1}{x}}\right\}$, $B=\left\{x \middle| x\in R, \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2-3x}{x}\right)\leq 1\right\}$;

19. $A=\left\{x \middle| x\in Z, \left(\frac{2}{9}\right)^{x^2} \geq \left(\frac{9}{2}\right)^{4x-21}\right\}$, $B=\left\{x \middle| x\in N, \log_{\frac{1}{2}}(x+4) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-2)\right\}$;

20. $A=\left\{x \middle| x\in R, 4\cdot(0.5)^{x(x+3)} < 0.25^{2x}\right\}$, $B=\left\{x \middle| x\in R, \log_3(x+2) < \log_3(2-3x)\right\}$.

➢ **Завдання 3.** Вкажіть та обґрунтуйте властивості відношення α, заданого на множині *A*, якщо:

1. $A=N,\ x\alpha y \Leftrightarrow (x-y)\vdots 3$;
2. $A=R,\ x\alpha y \Leftrightarrow y=x-3$;
3. $A=Z,\ x\alpha y \Leftrightarrow |y|=|x|$;
4. $A=N,\ x\alpha y \Leftrightarrow y=x$;
5. A – множина прямих на площині, відношення α – відношення перпендикулярності;
6. $A=R,\ x\alpha y \Leftrightarrow y=x+2$;
7. $A=C,\ x\alpha y \Leftrightarrow \operatorname{Im} y=\operatorname{Im} x$;
8. $A=R,\ x\alpha y \Leftrightarrow y<x-3$;
9. A – множина прямих у просторі, відношення α – відношення мимобіжності;
10. $A=N,\ x\alpha y \Leftrightarrow x=y \pmod 4$;
11. A – множина плоских фігур, відношення α – відношення рівноскладеності;
12. A – не порожня множина, $P(A)$ – булеан, α – відношення включення;
13. $A=R,\ x\alpha y \Leftrightarrow y<x$;
14. $A=R,\ x\alpha y \Leftrightarrow y+x<11$;
15. $A=R,\ x\alpha y \Leftrightarrow (y+x)\vdots 4$;
16. $A=R,\ x\alpha y \Leftrightarrow x^2+y^2<16$;

17. $A = R,\ x\alpha y \Leftrightarrow 2x + y = 6$;

18. $A = Z,\ x\alpha y \Leftrightarrow \overline{x \vdots y}$;

19. $A = R,\ x\alpha y \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 1$;

20. $A = R,\ x\alpha y \Leftrightarrow |x| > y$.

➢ **Завдання 4.** Вкажіть властивості заданих операцій. З’ясуйте, чи будуть задані операції алгебраїчними. Відповідь обґрунтуйте:

1. операція додавання в множині парних натуральних чисел;
2. операція додавання в множині непарних натуральних чисел;
3. операція знаходження кореня квадратного в множині додатних раціональних чисел;
4. операція знаходження спільного кратного у множині натуральних чисел;
5. операція додавання у множині ірраціональних чисел;
6. операція множення у множині ірраціональних чисел;
7. операція об’єднання множин у множині всіх множин;
8. операція множення матриць розміру 2×2;
9. операція знаходження спільного дільника у множині натуральних чисел;
10. операція віднімання у множині натуральних чисел;
11. операція множення у множині непарних цілих чисел;
12. операція ділення у множині цілих чисел;
13. множення матриць у множині верхніх трикутних матриць третього порядку;
14. множення квадратних невироджених матриць розміру *n*;
15. операція знаходження найменшого спільного кратного у множині натуральних чисел;
16. операція множення у множині натуральних чисел, які не кратні 3;
17. операція додавання у множині натуральних чисел, які не кратні 3;
18. операція множення у множині натуральних чисел, які кратні 5;
19. операція додавання у множині натуральних чисел, які кратні 5;
20. операція кон’юнкція у множині істинних висловлень.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2. МНОЖИНА НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

Тема 2.1. Означення системи натуральних чисел. Додавання й множення натуральних чисел

Теоретичні питання

1. Означення системи натуральних чисел.
2. Принцип математичної індукції. Метод математичної індукції.
3. Додавання натуральних чисел. Властивості додавання.
4. Множення натуральних чисел. Властивості множення.

Література:

1. Вивальнюк Л. М., Григоренко В. К., Левіщенко С. С. Числові системи. К. : Вища школа, 1988. 272 с. С. 61-65
2. Кугай Н. В., Калініченко М. М. Числові системи : навчальний посібник. Видання друге, перероблене, виправлене й доповнене. Глухів, 2024. 123 с. С. 49-60
3. Лиман Ф. М. Числові системи. Навчальний посібник Суми : Видавництво "МакДен", 2010. 192 с.
4. Кугай Н. В. Методологічні знання майбутнього вчителя математики : монографія. Харків: ФОП Панов А. М., 2017. 336 с.
5. Кугай Н. В., Борисов Є. М., Дем'яненко Ю. Ю. Що повинен знати вчитель математики про натуральні числа. Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки. Черкаси, 2014. Випуск 8 (301). С. 62-66.
6. Кугай Н.В., Калініченко М.М. Підготовка майбутніх учителів математики: методологічний аспект : монографія. Харків, 2020. 522 с.

Основні теоретичні факти

Аксіоми Пеано

Нехай задано множину *N*, елемент «одиниця» належить множині *N*, на цій множині введено відношення «безпосередньо слідувати за» і виконуються умови (аксіоми):

А1. Одиниця є натуральним числом, яке не слідує безпосередньо ні за яким іншим натуральним числом

А2. Яке б не було натуральне число a існує одне і тільки одне таке натуральне число a', яке безпосередньо слідує за a

А3. Яке б не було натуральне число, крім одиниці, існує одне і тільки одне натуральне число, за яким воно безпосередньо слідує.

А4. Для $\forall a,b \in N \;\; a' = b' \Rightarrow a = b$

А5. Аксіома індукції: Нехай множина $M \subset N$ і виконуються умови

1) $1 \in M$
2) $\forall a \in M \Rightarrow a' \in M$. Тоді $M = N$.

Множина *N*, для якої виконуються умови А1 – А5, називається множиною *натуральних* чисел. Елементи множини N називаються *натуральними числами*.

Умови А1 – А5 називаються *аксіомами Пеано*.

Правило орієнтир доведення тверджень за допомогою методу математичної індукції (МІ):

1. База індукції. *Перевіряємо*, що твердження виконується для $n=1 \, (n=n_0)$
2. Гіпотеза індукції. *Припускаємо* , що твердження виконується для $n=k$, $k>1 \ \left(k>n_0\right)$
3. Крок індукції. *Доводимо*, використовуючи гіпотезу індукції, що твердження виконується для $n=k+1$
4. Висновок. На основі принципу математичної індукції (ПМІ) *робимо висновок*, що твердження виконується для всіх натуральних чисел (або $\forall n>n_0, n\in N$)

Додаванням натуральних чисел називається бінарна операція (якщо вона існує), яка кожній парі натуральних чисел $(a;b)$ ставить у відповідність число $c\in N$, яке називається *сумою* цих чисел і позначається $c=a+b$, для якої виконуються умови:

$$\text{A1}^{+}.\ \forall a\in N\ a+1=a'$$

$$\text{A2}^{+}.\ \forall a,b\in N\ a+b'=\left(a+b\right)'$$

Властивості додавання

1. Сума 2-х натуральних чисел завжди існує і єдина	$\forall a,b\in N\ \ \exists! c\in N: a+b=c$
2. Асоціативний закон додавання	$\forall a,b,c\in N \left(a+b\right)+c=a+\left(b+c\right)$
3. Комутативний закон додавання	$\forall a,b\in N\ a+b=b+a$

Множенням натуральних чисел називається бінарна операція (якщо вона існує), яка кожній парі натуральних чисел $(a;b)$ ставить у відповідність число $c\in N$, яке називається добутком, $c=a\cdot b$, для якої виконуються умови:

$$\text{A1}^{*}.\ \forall a\in N\ a\cdot 1=a$$

$$\text{A2}^{*}.\ \forall a,b\in N\ a\cdot b'=a\cdot b+a$$

Властивості множення	
1. Добуток двох натуральних чисел авжди існує і єдиний	$\forall a,b\in N\ \exists! c\in N: a\cdot b=c$
2. Правий дистрибутивний закон	$\forall a,b,c\in N\ \left(a+b\right)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$

множення відносно додавання	
3. Лівий дистрибутивний закон множення відносно додавання	$\forall a,b,c \in N\ \ a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$
4. Асоціативний закон множення 5. Комутативний закон множення	$\forall a,b,c \in N\quad a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ $\forall a,b,c \in N\quad a\cdot b=b\cdot a$

Навчальні завдання

✍ Приклад №1. Довести, що $\forall n \in N\ \left(7\cdot 5^{2n-1}+2^{3n+1}\right)\vdots 17$.

○ Застосуємо метод математичної індукції.

1.База індукції. Перевіримо, чи виконується дане твердження для $n=1$: $7\cdot 5^{1}+2^{4}=35+16=51,\ 51\div 17=3$. Отже, $51\vdots 17$. Твердження виконується для $n=1$.

2.Гіпотеза індукції. Припустимо, що для $n=k$ твердження $\left(7\cdot 5^{2k-1}+2^{3k+1}\right)\vdots 17$ виконується.

3.Крок індукції. Доведемо, використовуючи гіпотезу індукції, що твердження виконується для $n=k+1$, тобто $\left(7\cdot 5^{2(k+1)-1}+2^{3(k+1)+1}\right)\vdots 17$. Після перетворення маємо, що $7\cdot 5^{2(k+1)-1}+2^{3(k+1)+1}=7\cdot 5^{2k+1}+2^{3k+4}=7\cdot 5^{2k-1}\cdot 5^{2}+2^{3k+1}\cdot 2^{3}=$ $=25\left(7\cdot 5^{2k-1}+2^{3k+1}\right)-17\cdot 2^{3k+1}$. $25(7\cdot 5^{2k-1}+2^{3k+1})\vdots 17$ (за гіпотезою індукції) і $17\cdot 2^{3k+1}\vdots 17$ (один із множників кратний 17). Звідси $\left(25\left(7\cdot 5^{2k-1}+2^{3k+1}\right)-17\cdot 2^{3k+1}\right)\vdots 17$.

4. На основі принципу математичної індукції (ПМІ) робимо висновок, що твердження $\left(7\cdot 5^{2n-1}+2^{3n+1}\right)\vdots 17$ виконується для $\forall n \in N$.

✍ Приклад №2. Довести, що $\forall n \geq 4$ виконується нерівність $3^{n}>5n^{2}$.

○ Застосуємо метод математичної індукції.

1.Б.і. Перевіримо, чи виконується нерівність для $n=4$: $3^{4}=81, 5\cdot 16=80$; $81>80$ – нерівність виконується.

2.Г.і. Припустимо, що нерівність є істинною для $n=k$, тобто $3^{k}>5\cdot k^{2}$.

3.К.і. Використовуючи гіпотезу, доведемо, що нерівність є правильною і для $n=k+1$, тобто $3^{k+1}>5\cdot(k+1)^{2}$, або $3^{k}\cdot 3>5\cdot(k+1)^{2}$. Справді, використовуючи гіпотезу маємо, що $3^{k}\cdot 3>5\cdot k^{2}\cdot 3=$ $=15\cdot k^{2}=5k^{2}+10k^{2}>5k^{2}+10k+5=5(k+1)^{2}\ \Rightarrow 3^{k}\cdot 3>5(k+1)^{2}$, що і треба було довести. (Легко перевірити, що $10k^2 > 10k+5, k \ge 4$, див. *зауваження* після розв'язання).

4.На основі ПМІ робимо висновок, що нерівність $3^n > 5n^2$ є істинною для $\forall n \ge 4$.

Зауваження. Доведемо, що $10k^2 > 10k+5$. Розглянемо різницю:

$$10k^2 - 10k - 5 = 10\left(k^2 - k - \frac{1}{2}\right) = 10\left(k^2 - k + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) = 10\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\right) =$$

$= 10\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{15}{2}$. Підставимо найменше значення, що задовольняє початкову нерівність (це 4): $10\left(4 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{15}{2} = 10 \cdot \frac{49}{4} - \frac{15}{2} = \frac{5 \cdot 49 - 15}{2} = \frac{230}{2} = 115 > 0$.

Оскільки нерівність виконується для найменшого значення, то вона буде виконуватися і для $\forall n \in N, n \ge 4$.

✍ Приклад №3. Довести, що $\forall n \in N$ $\frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \ldots + \frac{2n-1}{3^n} = 1 - \frac{n+1}{3^n}$.

○ 1.База індукції. Перевіримо, чи виконується дана рівність для $n = 1$: ліва частина дорівнює $\frac{1}{3}$, права частина: $1 - \frac{2}{3}$. Отже, $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

2.Гіпотеза індукції. Припустимо, що дана рівність виконується для $n = k$, тобто $\frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \ldots + \frac{2k-1}{3^k} = 1 - \frac{k+1}{3^k}$.

3.Крок індукції. За допомогою гіпотези індукції доведемо, що рівність виконується і для $n = k+1$: $\frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \ldots + \frac{2k-1}{3^k} + \frac{2(k+1)-1}{3^{k+1}} = 1 - \frac{k+1+1}{3^{k+1}}$.

Використовуємо гіпотезу індукції і заміняємо вираз $\frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \ldots + \frac{2k-1}{3^k}$ на $1 - \frac{k+1}{3^k}$, отримуємо:

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \ldots + \frac{2k-1}{3^k} + \frac{2(k+1)-1}{3^{k+1}} = 1 - \frac{k+1}{3^k} + \frac{2(k+1)-1}{3^{k+1}} = 1 - \frac{3k+3-2k-2+1}{3^{k+1}} =$$

$= 1 - \frac{k+2}{3^{k+1}}$, що і треба було довести.

4.На основі ПМІ робимо висновок, що рівність виконується для $\forall n \in N$.

✍ Приклад №4. Довести, що 7+3=10.

○ Для доведення цієї рівності будемо використовувати аксіоми Пеано й додавання. Спочатку розпишемо число 3 як 2+1 і за першою аксіомою додавання матимемо, що $3 = 2 + 1 = 2' \Rightarrow 3 = 2'$. Тепер за аксіомами додавання матимемо: $7 + 2' = (7+2)' = (7+1')' = \left((7+1)'\right)' = \left((7')'\right)' = \left(8'\right)' = 9' = 10.$

✍ <u>Приклад №5</u>. Довести, що $7 \cdot 2 = 14$.

○ Розпишемо число 2 за першою аксіомою додавання як $2 = 1 + 1 = 1'$. Одержимо такий вираз $7 \cdot 1'$. Тепер, використовуючи другу аксіому множення, маємо $7 \cdot 1' = 7 \cdot 1 + 7$. Використавши першу аксіому множення отримали $7 \cdot 1 + 7 = 7 + 7 = 14$. Рівність доведена.

Завдання для аудиторної роботи

✍ №1. Доведіть, що на множині N виконуються твердження:

а) $2 + 18 + 60 + ... + n(n+1)\cdot(2n-1) = \dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(3n-1)}{6}$;

б) $2^n \geq n^2 + n + 2, n \geq 5$;

в) $\left(10^{n+1} - 10(n+1) + n\right) \vdots 81$;

г) $2^n > n^2, n \geq 5$;

д) $2^n + 7 < \sqrt{n! + 1}, n > 7$;

е) $\left(2 \cdot 3^{6n} + 3 \cdot 2^{3n+1}\right) \vdots 7$.

✍ №2. Доведіть, що в множині натуральних чисел справджується співвідношення:

а) $a = b \Rightarrow ac = bc$

б) $a = b \Rightarrow a + c = b + c$

в) $a + c = b + c \Rightarrow a = b$

✍ №3. Доведіть рівності:

а) 5+3=8	г) 17+3=20	є) 4+5=9
б) 14+8=22	д) 9+5=14	ж) 11+5=16
в) 3+9=12	е) 8+7=15	з) 10+7=17

✍ №4. Доведіть рівності:

а) $2 \cdot 3 = 6$	г) $4 \cdot 5 = 20$	є) $9 \cdot 3 = 27$
б) $3 \cdot 4 = 12$	д) $2 \cdot 8 = 16$	ж) $2 \cdot 7 = 14$
в) $2 \cdot 6 = 12$	е) $7 \cdot 4 = 28$	з) $4 \cdot 6 = 24$

Завдання для самостійної роботи

✍ №1. Доведіть, що на множині N виконуються твердження:

а) $\left(3^{2n+2} \cdot 5^{2n} - 3^{3n+2} \cdot 2^{2n}\right) \vdots 1053$;

б) $\left(n^6 - 3n^5 + 6n^4 - 7n^3 + 5n - 2n\right) \vdots 24$

в) $n^3 > 3n + 3, n > 4$

г) $1 + 8 + 27 + ... + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

✍ №2. Доведіть рівності:

а) 13+4=17 г) 13+5=18

б) 8+4=12 д) 17+2=19

в) 7+5=12 е) 10+10=20

✍ №3. Доведіть рівності:

а) $4 \cdot 4 = 16$ г) $8 \cdot 3 = 24$

б) $3 \cdot 5 = 15$ д) $5 \cdot 2 = 10$

в) $7 \cdot 3 = 21$ е) $3 \cdot 3 = 9$

Додаткові завдання

✍ № 1. Чи є алгебраїчними у множині натуральних чисел операції: а) додавання; б) множення; в) піднесення до степеня; г) знаходження кореня *n*-ого степеня з натурального числа? Відповідь обґрунтуйте.

✍ № 2. Доведіть рівність $1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, не використовуючи метод математичної індукції.

✍ № 3. Доведіть, що $\forall n \in N\, \exists k \in N\ (n = 2k \vee n = 2k+1)$.

✍ № 4. Множини називаються еквівалентними, якщо між ними можна встановити бієкцію. Доведіть: а) множина натуральних чисел еквівалентна множині парних натуральних чисел; б) множина натуральних чисел еквівалентна множині непарних натуральних чисел; в) множина непарних натуральних чисел еквівалентна множині парних натуральних чисел.

✍ *Проєкт.* Проаналізуйте навчальні програми з математики (https://mon.gov.ua/) для 1-4 класів і для 5-9 класів та з'ясуйте: у якому класі вводиться поняття натурального числа, чи є означення натурального числа? У якому класі вводиться операція додавання, множення, чи є відповідні означення? Чи розглядаються властивості операцій додавання і множення? Якщо так, то як вони вводяться, чи є відповідні означення? Чи співпадають назви цих властивостей з назвами у вищій математиці (у числових системах)? Заповніть таблицю 2.1.1.

Таблиця 2.1.1

Операція	Чи є означення		Властивості		Чи є алгебр	Компоненти	Результат
	ЧС	ШКМ	ЧС	ШКМ			
Додавання							
Множення							

Які ще операції у множині натуральних чисел розглядають у ШКМ? Для кожної такої операції встановіть, чи є вона алгебраїчною. Відповідь обґрунтуйте.

Відповіді: *Завдання для аудиторної роботи*. **№1**. Застосуйте метод МІ. **№2**. Застосуйте аксіому індукції. **№3**. Використайте аксіоми і властивості додавання. **№4**. Використайте аксіоми і властивості множення. *Завдання для самостійної роботи*. **№1**. Застосуйте метод МІ. **№2**. Використайте аксіоми і властивості додавання. **№3.** Використайте аксіоми і властивості множення.

Тема 2.2. Відношення порядку на множині натуральних чисел. Віднімання та ділення натуральних чисел

Теоретичні питання

1. Відношення порядку на множині натуральних чисел
2. Монотонність відношення порядку відносно додавання і множення
3. Віднімання натуральних чисел, його властивості
4. Ділення натуральних чисел, його властивості

Література:

1. Вивальнюк Л. М., Григоренко В. К., Левіщенко С. С. Числові системи. К. : Вища школа, 1988. 272 с. С. 65-68
2. Кугай Н. В., Калініченко М. М. Числові системи : навчальний посібник. Видання друге, перероблене, виправлене й доповнене. Глухів, 2024. 123 с. С. 61-77
3. Лиман Ф. М. Числові системи. Навчальний посібник Суми : Видавництво "МакДен", 2010. 192 с.
4. Кугай Н. В. Методологічні знання майбутнього вчителя математики : монографія. Харків: ФОП Панов А. М., 2017. 336 с.
5. Кугай Н. В., Борисов Є. М., Дем’яненко Ю. Ю. Що повинен знати вчитель математики про натуральні числа. Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки. Черкаси, 2014. Випуск 8 (301). С. 62-66.
6. Кугай Н.В., Калініченко М.М. Підготовка майбутніх учителів математики: методологічний аспект : монографія. Харків, 2020. 522 с.

Основні теоретичні факти

<table>
<tr><td>Сума будь-яких двох натуральних чисел не дорівнює ні одному з доданків.</td><td>$\forall a,b \in N \left(a+b \neq a \wedge a+b \neq b \right)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Для довільних натуральних чисел $a,b \in N$ виконується один і тільки один з таких випадків: 1) $a=b$; 2) $\exists k \in N\ a = b + k$; 3) $\exists l \in N\ b = a + l$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Про натуральні числа a і b кажуть, що «a більше b» (або «b менше a»), і відповідно записують $a > b$ (або $b < a$), тоді і тільки тоді, коли $\exists c \in N\ a = b + c$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Про натуральні числа a і b кажуть , що «a більше або дорівнює b» (або «b менше або дорівнює a»), і відповідно записують $a \geq b$ (або $b \leq a$) тоді і тільки тоді, коли $\overline{b > a}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Основні властивості відношення «більше» («менше»)</td></tr>
<tr><td>Зв’язність
Для будь-яких двох натуральних чисел виконується тільки одна з умов: або $a = b$, або $a > b$, або $b > a$.</td><td>$\forall a, b, c \in N\ (a = b \vee a > b \vee b > a)$</td></tr>
<tr><td>Антирефлексивність
Будь-яке натуральне число не є більшим саме за себе.</td><td>$\forall a \in N\ \overline{a > a}$</td></tr>
<tr><td>Несиметричність
Для будь-яких натуральних чисел a та b виконується умова: якщо a більше за b, то b не є більшим за a.</td><td>$\forall a, b \in N\ (a > b \Rightarrow \overline{b > a})$</td></tr>
<tr><td>Транзитивність
Якщо для довільних натуральних чисел a, b, c виконується, що a більше b, а b більше c, то для них виконується, що a більше c.</td><td>$\forall a, b, c \in N\ (a > b \wedge b > c) \Rightarrow a > c$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Відношення «більше» («менше») є відношенням строгого лінійного порядку. Структура (N, >) є упорядкованою множиною. Її називають натуральним рядом.</td></tr>
<tr><td>Монотонність відносно додавання
Якщо для будь-яких натуральних чисел a, b, c виконується, що a більше b, то для них виконується, що $a + c$ більше $b + c$</td><td>$\forall a, b, c \in N\ (a > b \Rightarrow a + c > b + c)$</td></tr>
<tr><td>Монотонність відносно множення
Якщо для будь-яких натуральних чисел a, b, c виконується, що a більше b, то для них виконується,</td><td>$\forall a, b, c \in N\ (a > b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c)$</td></tr>
</table>

що $a \cdot c$ більше $b \cdot c$	
Сума будь-яких двох натуральних чисел не дорівнює 1.	$\forall a, b \in N\ a + b \neq 1$

Числом *нуль* (*позначення*: 0) називається елемент, який має такі властивості ($N_0 = N \cup \{0\}$):

1) $0' = 1$

2) $\forall a \in N_0\ a + 0 = 0 + a = a$

3) $\forall a \in N_0\ a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

4) $\forall a, b \in N_0\ \ a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$

Елементи множини N_0 називають *цілими невід'ємними числами*.

Відніманням цілих невід'ємних чисел a та b називається операція (якщо вона існує), яка обернена до операції додавання, і яка числам a, $b \in N_0$ зіставляє таке число $c \in N_0$ (*позначення*: $c = a - b$), яке називається їхньою *різницею*, що $a = b + (a - b)$, тобто $a = b + c$.

Різниця цілих невід'ємних чисел a та b існує тоді і тільки тоді, коли $a \geq b$. Якщо різниця існує, то вона єдина.

Властивості різниці

(припускаємо, що всі записані різниці існують)

1. $a - b \leq a$
2. $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$
3. $a - b = c - d \Leftrightarrow a + d = b + c$
4. $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$
5. $(a - b) - (c - d) = (a + d) - (b + c)$
6. $a - (b - c) = (a - b) + c$, $a - (b - c) = (a + c) - b$
7. $a - (b + c) = (a - b) - c$
8. $(a + b) - c = (a - c) + b$, $(a + b) - c = (b - c) + a$
9. $(a - b) - c = a - (b + c)$, $(a - b) - c = (a - c) - b$

Діленням числа a на число b називається операція, яка числам a, $b \in N_0$ зіставляє число c, яке називається їхньою *часткою*, (*позначення*: $c = \frac{a}{b} \in N_0$ або $c = a : b$)), і таке, що $\frac{a}{b} \cdot b = a$.

У записі $c = a : b$ число a називають діленим, b – дільником, c – часткою.

Якщо частка $\frac{a}{b}$ існує, то кажуть, що a ділиться на b націло.	
Властивості ділення й частки	
Необхідна умова існування частки	Для існування частки $\frac{a}{b}$ ($a \neq 0, b \neq 0$) необхідно (але не достатньо), щоб $a \geq b$
Єдиність частки	Якщо частка існує, то вона єдина
Нехай $a \in N_0, b \in N$. Кажуть, що числа a та b знаходяться у відношенні *подільності* (*позначення*: $a \vdots b$), якщо $\exists c \in N_0 \; a = c \cdot b$.	
Властивості відношення подільності	
Не є зв'язним Не для всіх цілих невід'ємних чисел виконується хоча б одна з умов: або $a = b$, або $a \vdots b$, або $b \vdots a$.	$\exists a,b,c \in N_0 \left(a \neq b \wedge \overline{a \vdots b} \wedge \overline{b \vdots a} \right)$
Рефлексивне Кожне натуральне число кратне саме собі	$\forall a \in N \; a \vdots a$
Антисиметричне Для будь-яких натуральних чисел *a* та *b* з того, що *a* кратне *b* і *b* кратне *a* слідує, що *a* = *b*.	$\forall a,b \in N \; (a \vdots b \wedge b \vdots a \Rightarrow a = b)$
Транзитивне Для будь-яких натуральних чисел *a*, *b* та *c* з того, що *a* кратне *b* і *b* кратне *c* слідує, що *a* кратне *c*.	$\forall a,b,c \in N \; (a \vdots b \wedge b \vdots c \Rightarrow a \vdots c)$
Відношення подільності у множині натуральних чисел є відношенням нестрогого часткового порядку.	

Навчальні завдання

✍ Приклад №1. Доведіть, що $\forall a,b \in N \;\; a + b > a$.

○ Для кожного $a \in N$ розглянемо множину $M = \{ b \in M | a + b > a \}$ і покажемо, що $M = N$.

1) Нехай $b = 1$. Тоді $a + 1 = a'$, відомо, що $a' > a \Rightarrow a + 1 > a$. Отже, $1 \in M$.

2) Покажемо, що $\forall b \in M \Rightarrow b' \in M$. Оскільки $b \in M$, то $a + b > a$. Треба довести, що $a + b' > a$. Маємо: $a + b' = (a+b)' > a + b > a$. Отже, $b' \in M$. За аксіомою індукції $M = N$.

✍ <u>Приклад №2.</u> Доведіть, що $\forall a, b \in N \ a \cdot b \geq a$.

○ Для кожного $a \in N$ розглянемо множину $M = \{b \in M | a \cdot b \geq a\}$ і покажемо, що $M = N$.

1) Нехай $b = 1$. Тоді $a \cdot 1 = a \geq a$, отже, $1 \in M$.

2) Покажемо, що $\forall b \in M \Rightarrow b' \in M$. Оскільки $b \in M$, то $a \cdot b \geq a$. Треба довести, що $a \cdot b' \geq a$. Маємо: $a \cdot b' = a \cdot b + b > a + b > a$. Отже, $b' \in M$. За аксіомою індукції $M = N$.

✍ <u>Приклад № 3</u>. Сформулюйте умови існування різниці для цілих невід'ємних чисел $a - (a - b) = b$ та доведіть рівність.

○ За теоремою про існування різниці маємо: для існування різниці $a - b$ необхідно й достатньо, щоб $a \geq b$; а різниця $a - (a - b)$ існує лише тоді, коли $a \geq a - b$. Для цілих невід'ємних чисел зменшуване більше або рівне різниці, тому умова $a \geq a - b$ виконується для всіх цілих невід'ємних чисел. Отже, різниця $a - (a - b)$ існує тоді й тільки тоді, коли $a \geq b$. Доведемо рівність $a - (a - b) = b$. Нехай $a - b = c$. Тоді за означенням різниці $a = b + c$ або $a = c + b$. Тоді можна записати, що $b = a - c$. Ліва частина рівності $a - (a - b) = a - c$. Рівність доведено.

✍ <u>Приклад № 4.</u> Доведіть, що 5 – 2=3.

○ 5 – 2=3, бо 2 + 3 = 3 + 2 = 3 + 1' = (3 + 1)' = (3')' = 4' = 5.

✍ <u>Приклад № 5</u>. Запишіть і доведіть праву дистрибутивну властивість ділення відносно віднімання.

○ Права дистрибутивна властивість ділення відносно віднімання має вигляд: $(a - b) : c = a : c - b : c$. Доведемо записану рівність за умови, що всі записані різниці й частки існують. Нехай $a : c = k_1$, тоді за означенням частки $a = k_1 \cdot c$. Аналогічно, $b : c = k_2 \Rightarrow b = k_2 \cdot c$. Тоді пава частина записаної рівності буде $k_1 - k_2$. Розглянемо ліву частину: $(a - b) : c = (k_1 \cdot c - k_2 \cdot c) : c = (k_1 - k_2) \cdot c : c = k_1 - k_2$. Отже, обидві частини рівності співпадають, що й треба було довести.

✍ <u>Приклад № 6</u>. Доведіть, що $15 \div 5 = 3$.

○ $15 \div 5 = 3$, бо $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3 = 5 \cdot 2' = 5 \cdot 2 + 5 = 5 \cdot 1' + 5 = (5 \cdot 1 + 5) + 5 = = (5+5) + 5 = 15$.

Завдання для аудиторної роботи

✍ № 1. Доведіть, що в множині натуральних чисел виконуються твердження:

а) $\forall a, b, c \in N \; a > b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$;

б) $\forall a, b \in N \; a + 1 > b \wedge b \geq a \Rightarrow a = b$

✍ № 2. Сформулюйте умови існування різниці (частки) й доведіть записані твердження:

а) $(a - b) - c = a - (b + c)$; б) $(a + c) - (b + c) = a - b$; в) $(a - b) + (b - c) = a - c$; г) $(a + b) : c = a : c + b : c$.

✍ № 3. Доведіть, що в множині N $ac \leq bc \Rightarrow a \leq b$.

✍ № 4. Доведіть, що $\forall a, b \in N \; a \cdot b > b$.

✍ № 5. Доведіть записані рівності: а) 12 – 3 = 9; б) 12 : 3 = 4.

✍ № 6. До якої алгебраїчної структури можна віднести вказані структури: а) $(N, +)$; б) $(N, \cdot)$; в) $(N, +, \cdot, >)$? Відповідь обґрунтуйте.

Завдання для індивідуальної роботи

✍ № 1. Сформулюйте умови існування різниці (частки) і доведіть записані рівності: а) $(a + b) - (c + d) = (a - c) + (b - d)$; б) $(a - b) - (c - d) = (a - c) - (b - d)$; в) $(a - b) : c = a : c - b : c$.

✍ № 2. Доведіть, що в множині натуральних чисел виконуються твердження: $\forall a, b, c \in N \; a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$.

✍ № 3. Доведіть: а) 15 – 6 = 9; б) 18 – 3 = 15; в) 7 – 2 = 5; г) 12 : 4 = 3; д) 21 : 3 = 7; е) 24 : 12 = 2.

✍ № 4. До якої алгебраїчної структури можна віднести вказані структури: а) $(N, +, <)$; б) $(N, \cdot)$; в) $(N, +, \cdot)$? Відповідь обґрунтуйте.

Додаткові завдання

✍ № 1. Доведіть, що $\forall a \in N \; \forall b \in N \; a \cdot b \geq a$.

✍ № 2. *Проєкт.* Проаналізуйте навчальні програми з математики (https://mon.gov.ua/) для 1-4 класів і для 5-9 класів та з'ясуйте: у якому класі вводиться операція віднімання, ділення, чи є відповідні означення? Чи розглядаються властивості операцій додавання і множення? Якщо так, то як вони вводяться, чи є відповідні означення? Чи співпадають назви цих властивостей з назвами у вищій математиці (у числових системах)? У якому класі вводиться поняття відношення «більше»? Які ще відношення можна розглянути на множині натуральних чисел? Вкажіть їхні властивості. Заповніть таблицю 2.2.1.

Таблиця 2.2.1

Операція	Чи є означення		Властивості		Чи є алгебр	Компоненти	Результат
	ЧС	ШКМ	ЧС	ШКМ			
Віднімання							
Ділення							

Відповіді: *Завдання для аудиторної роботи*. **№2**. а) $a \geq b+c$; б) $a \geq b$; в) $a \geq b \geq c$; г) $a \vdots b \wedge b \vdots c$. **№6**.а) півгрупа; б) півгрупа з одиницею; в) упорядковане півкільце. *Завдання для самостійної роботи.* **№1.** а) $a \geq c \wedge b \geq d$; б) $a \geq b \geq d \wedge a \geq c \geq d \wedge a-b \geq c-d$; в) $a \vdots b \wedge b \vdots c$. **№4**. а) упорядкована півгрупа; б) півгрупа з одиницею; в) півкільце.

Самостійна робота № 2 за ЗМ «Множина натуральних чисел»

➢ **Завдання 1**. Доведіть твердження для $n \in N$:

1. $-1+3-5+\cdots+(-1)^n(2n-1)=(-1)^n n$;
2. $1-2^2+3^2-4^2+\cdots(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$;
3. $1+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;
4. $\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{36}+\cdots\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1-\dfrac{1}{(n+1)^2}$;
5. $1+2^4+3^4+4^4+\cdots+n^4=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$;
6. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;
7. $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n}=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$
8. $1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+\cdots+n(3n+1)=n(n+1)^2$;
9. $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+\cdots\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\dfrac{n}{4n+1}$;
10. $1\cdot 2+2\cdot 5+3\cdot 8+\cdots+n(3n-1)=n^2(n+1)$;
11. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\cdots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;
12. $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$;
13. $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+3\cdot 4^2+\cdots+(n-1)n^2=\dfrac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$;
14. $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$;
15. $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\cdots\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{n}{3n+1}$;
16. $\dfrac{1}{4\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 6}+\cdots\dfrac{1}{(n+3)(n+4)}=\dfrac{n}{4(n+4)}$;
17. $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$;

18. $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\dfrac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$;

19. $1+3+6+10+\cdots+\dfrac{n(n-1)}{2}+\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$;

20. $2+7+14+\cdots+(n^2+2n-1)=\dfrac{n(2n^2+9n+1)}{6}$.

➢ **Завдання 2**. Доведіть нерівності:

1. $2^n>2n,\ n\in N,\ n\geq 3$;
2. $2^{n+4}>(n+4)^2,\ n\in N$;
3. $3^n>n^3,\ n\in N,\ n\geq 4$;
4. $2^n>n^2,\ n\in N,\ n>4$;
5. $2^n>2n+1,\ n\in N,\ n\geq 3$;
6. $3^n>4n+1,\ n\in N,\ n\geq 3$;
7. $4^n>3n^2+1,\ n\in N,\ n\geq 2$;
8. $2^n>n^3+23,\ n\in N,\ n\geq 10$;
9. $(1+a)^n\geq 1+na,\ a>-1,\ n\in N$;
10. $3^n>2^n+3n,\ n\in N,\ n\geq 3$;
11. $2n>n(n+4),\ n\in N,\ n>5$;
12. $3n>5n^2,\ n\in N,\ n>3$;
13. $2n>n^2+n+1,\ n\in N,\ n>4$;
14. $2n>n^3,\ n\in N,\ n>9$;
15. $2^{n+2}>2n+5,\ n\in N$
16. $2^n>1+\sqrt{2^{n-1}},\ n\in N,\ n\geq 2$
17. $2^{n+3}\geq(n+3)^2,\ n\in N$
18. $3^n\geq n\cdot 2^{n+1},\ n\in N,\ n\geq 7$;
19. $n^2>n+1,\ n\in N,\ n>1$;
20. $6^n\geq 1+5n,\ n\in N$.

➢ **Завдання 3**. Доведіть твердження для $n\in N$:

1. $\left(7^n+3n-1\right)\vdots\,9$;
2. $\left(4^n+15n-1\right)\vdots\,9$;
3. $\left(3^{2n-2}-8n-9\right)\vdots\,16$;
4. $\left(4\cdot6^n+5n-4\right)\vdots\,25$;
5. $\left(3\cdot9^n+40n-67\right)\vdots\,64$;
6. $\left(6^{2n}+3^{n-2}+3^n\right)\vdots\,11$;
7. $\left(7\cdot5^{2n}+12\cdot6^n\right)\vdots\,19$;
8. $\left(2^{2n-1}+1\right)\vdots\,3$;
9. $\left(10^{n-1}+18n+8\right)\vdots\,27$;
10. $\left(2^{5n+3}+5^n\cdot3^{n+2}\right)\vdots\,17$;
11. $\left(2^{2n-2}-1\right)\vdots\,3$;
12. $\left(7^{2n+2}-1\right)\vdots\,48$;
13. $\left(9^{n+2}-18n-27\right)\vdots\,18$;
14. $\left(7^{2n+2}-4^{2n+2}\right)\vdots\,33$;
15. $\left(3^{3n+2}+2^{4n+1}\right)\vdots\,11$;
16. $\left(3^{2n}+15\right)\vdots\,12$;
17. $\left(4^{2n}-3^{2n}-7\right)\vdots\,84$;
18. $\left(6^{2n-1}+1\right)\vdots\,7$;
19. $\left(5^n-3^n+2n\right)\vdots\,4$;
20. $\left(5^{2n+1}\cdot2^{n+1}+2^{2n+1}\cdot3^{n+2}\right)\vdots\,19$

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3. МНОЖИНА ЦІЛИХ ЧИСЕЛ. МНОЖИНА РАЦІОНАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

Тема 3.1. Означення системи цілих чисел. Упорядкованість кільця цілих чисел

Теоретичні запитання

1. Означення системи цілих чисел
2. Властивості цілих чисел
3. Відношення порядку на множині цілих чисел

Література:

1. Вивальнюк Л. М., Григоренко В. К., Левіщенко С. С. Числові системи. К. : Вища школа, 1988. 272 с. С. 114-123
2. Кугай Н. В., Калініченко М. М. Числові системи : навчальний посібник. Видання друге, перероблене, виправлене й доповнене. Глухів, 2024. 123 с. С. 79-85
3. Лиман Ф. М. Числові системи. Навчальний посібник Суми : Видавництво "МакДен", 2010. 192 с.
4. Кугай Н. В. Методологічні знання майбутнього вчителя математики : монографія. Харків: ФОП Панов А. М., 2017. 336 с.
5. Кугай Н.В., Калініченко М.М. Підготовка майбутніх учителів математики: методологічний аспект : монографія. Харків, 2020. 522 с.

Основні теоретичні факти

Основні вимоги побудови числових систем Z, Q, R, C такі:

1. У системі Z завжди існує розв'язок рівняння $b + x = a$ для довільних $a, b \in Z$

2. У системі Q завжди існує розв'язок рівняння $b \cdot x = a$ для $\forall a, b \in Q, b \neq 0$

3. Система R має бути замкнена відносно часткової неалгебраїчної операції (відношення) граничного переходу: границя будь-якої фундаментальної послідовності елементів з R має належати до R.

4. У системі C завжди повинна виконуватися операція знаходження кореня будь-якого натурального степеня.

Усі ці вимоги відображено в системах аксіом, які описують відповідні числові системи. Надалі під час формулювання системи аксіом для числових систем *Z, Q, R, C* поділятимемо їх на 2 частини: 1) структурні, 2) спеціальні аксіоми, які виокремлюють з множини певних структур відповідну числову систему. Домовимось позначати: множину

аксіом кільця через A_k, поля – A_p.
Алгебру $(Z,+,\cdot,0,1,N)$ називають системою цілих чисел, а її елементи цілими числами, якщо виконуються такі властивості (аксіоми цілих чисел): 1) структурні аксіоми A_k (кільця); 2) спеціальні аксіоми: а) $(N,+,\cdot,0,1)$ – півкільце натуральних чисел; б) $N \subset Z$; в) аксіома мінімальності: нехай $M \subseteq Z$ і виконуються умови: 1) $N \subset M$; 2) $\forall a,b \in M, a \in M, b \in M \Rightarrow a-b \in M$. Тоді M співпадає множиною Z.
Властивості цілих чисел: 1) $(Z;+)$ – абелева група, операція «+» – асоціативна і комутативна, $0 \in Z$, $a \in Z \Rightarrow -a \in Z$. 2) Операція множення дистрибутивна відносно операції додавання: $\forall a,b,c \in Z\ a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ 3) Операція множення асоціативна і комутативна: $\forall a,b,c \in Z\ a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c \qquad \forall a,b \in Z\ a\cdot b = b\cdot a$ 4) У системі Z завжди існує розв'язок рівняння $b+x=a$ для довільних $a,b \in Z$ Множина Z є розширенням множини *N*. Всі властивості, які виконувалися в *N*, виконуються і в множині Z.
Кожне ціле число є різницею натуральних чисел. Якщо $k-l = k_1 - l_1$, то $k + l_1 = k_1 + l$ і навпаки.
Кільце $(Z;+;\cdot)$ є комутативним кільцем з одиницею.
Кільце цілих чисел можна впорядкувати і тільки одним способом. Відношення порядку в множині цілих чисел архімедівське і є продовженням порядку в півкільці натуральних чисел.

Навчальні завдання

✍ Приклад 1. Доведіть, що число $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ є цілим.

○ Запишемо вирази під квадратними коренями як квадрат суми та квадрат різниці:

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{4+4\sqrt{3}+3} + \sqrt{4-4\sqrt{3}+3} = \sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}.$$

Тепер за властивостями кореня маємо:

$$\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=\left|2+\sqrt{3}\right|+\left|2-\sqrt{3}\right|.$$

Розкриємо модулі за означенням модуля:

$$\left|2+\sqrt{3}\right|+\left|2-\sqrt{3}\right|=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4.$$

Отже, число $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ ціле.

✍ Приклад 2. З'ясуйте, чи є число $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{2}\right)$ цілим.

○ Застосуємо формулу синуса суми двох аргументів, властивість обернених функцій і зв'язок синуса й косинуса одного й того самого аргумента:

$$\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{2}\right)=\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)\cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right)+\cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)\sin\left(\arccos\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}+\cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)\sin\left(\arccos\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)}\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\frac{1}{2}\right)}=$$

$=\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1.$ Отже, число $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{2}\right)$ є цілим.

Можна запропонувати й простіший спосіб, врахувавши, що $\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}$. Тоді $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1.$

✍ Приклад 3. Доведіть, що $\forall n\in N$ вираз $(n-2)n(n+1)(n-1)+1$ є квадратом деякого цілого числа.

○ Згрупуємо 1 з 3 дужкою, а 2 з 4 та перемножимо їх:

$$\left((n-2)(n+1)\right)\left(n(n-1)\right)+1=\left(n^2-n-2\right)\left(n^2-n\right)+1.$$

Замінимо $n^2-n=x$. Отримаємо $(x-2)x+1$. Розкриємо дужки та виділимо повний квадрат: $(x-2)x+1=x^2-2x+1=(x-1)^2$. Повернемося до попередньої заміни: $(x-1)^2=\left(n^2-n-1\right)^2$.Оскільки n^2-n-1 є деяким цілим числом (як різниця натуральних), то $\forall n\in N$ виконується, що вираз $(n-2)n(n+1)(n-1)+1$ є квадратом деякого цілого числа.

✍ Приклад 4. Доведіть, що із m різних цілих чисел завжди можна вибрати два таких, різниця яких ділиться на $m-1$.

○ Під час ділення на $m - 1$ може бути $m - 1$ різна остача: 0; 1; 2; …; $m - 1$. Оскільки різних чисел m, то за принципом Діріхле буде два числа, які під час ділення на $m - 1$ мають однакові остачі, тобто, їхня різниця буде ділитися на $m - 1$.

✍ <u>Приклад 5</u>. Доведіть твердження: $\left(a^2+b^2\right)⋮7 \Rightarrow a⋮7 \wedge b⋮7$.

○ Доведемо методом від супротивного. Припустимо, що $\left(a^2+b^2\right)⋮7$, але $\overline{a⋮7}$ або $\overline{b⋮7}$. Нехай $\overline{b⋮7}$, а $a⋮7$. Тоді $b=7k+m, m\in\{1;2;3;4;5;6\}$, $a=7l$, $k,l,m\in Z$. Тоді $a^2+b^2=(7l)^2+\left(7k+m\right)^2=49l^2+49k^2+14km+m^2.$ Всі доданки, крім m^2, очевидно кратні 7. Розглянемо, які значення може приймати m^2, якщо $m\in\{1;2;3;4;5;6\}$: 1, 4, 9, 16, 25, 36. Жодне з них не кратне 7. Тоді й $\overline{\left(a^2+b^2\right)⋮7}$, що суперечить умові задачі. Аналогічно розглядається випадок, якщо $b⋮7$, а $\overline{a⋮7}$. Нехай тепер $\overline{a⋮7}$ і $\overline{b⋮7}$. Тоді $a=7l+h, h\in\{1;2;3;4;5;6\}$ і $b=7k+m, m\in\{1;2;3;4;5;6\}$. Маємо: $a^2+b^2=(7l+h)^2+\left(7k+m\right)^2=49l^2+14lh+h^2+49k^2+14km+m^2.$ Всі доданки, крім m^2+h^2, очевидно кратні 7. Розглянемо, які значення може приймати m^2+h^2, якщо $m\in\{1;2;3;4;5;6\}$ і $h\in\{1;2;3;4;5;6\}$: 2, 5, 10, 17, 26, 37, 8, 13, 20, 29, 40, …, 72 (пропонуємо записати решту остач самостійно). У жодному з цих випадків m^2+h^2 не кратне 7. Тоді й $\overline{\left(a^2+b^2\right)⋮7}$, що суперечить умові задачі. Інших випадків щодо a та b бути не може. Твердження доведено.

Завдання для аудиторної роботи

✍ №1. З’ясуйте, яким числом (цілим, натуральним) є значення виразу:

а) $\dfrac{\sqrt{9}+\sqrt{5}}{\sqrt{9}-\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{49}}{2}-\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$; б) $\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}-4\sqrt{5}$; в) $tg\dfrac{\pi}{11}\cdot tg\dfrac{9\pi}{22}\cdot tg\dfrac{\pi}{13}\cdot tg\dfrac{11\pi}{26}$;

г) $\sin^4\dfrac{\pi}{8}+\sin^4\dfrac{3\pi}{8}+\sin^4\dfrac{5\pi}{8}+\sin^4\dfrac{7\pi}{8}$.

✍ №2. Доведіть, що множини N і Z рівнопотужні.

✍ №3. Доведіть, що числа $3n + 2$, $5n + 2$ і $5n - 2$ для кожного натурального n не є квадратами цілих чисел.

✍ №4. Доведіть, що довжина принаймні одного із катетів піфагорійського трикутника ділиться на 3.

✍ №5. Доведіть, що не існує цілих чисел *a*, *b* таких, які б задовольняли рівняння $a^2+1986=b^2$.

✍ №6. Доведіть, що для кожного цілого *n* вираз $\frac{n^5}{120}-\frac{n^3}{24}+\frac{n}{80}$ є цілим числом.

Завдання для самостійної роботи

✍ №1. З'ясуйте, яким числом (цілим, натуральним) є значення виразу:

а) $8\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\frac{1}{\cos\frac{\pi}{7}}$; б) $tg22^0\cdot tg82^0+tg82^0\cdot tg142^0+tg142^0\cdot tg202^0$.

✍ № 2. Доведіть, що $\forall a,b,c\in Z\ (a+c=b+c\Rightarrow a=b)$.

✍ № 3. Чи існують цілі розв'язки рівняння $a^2+1982=b^2$?

✍ № 4. Чи можна побудувати на площині такий правильний трикутник, щоб усі три його вершини мали цілі координати? А в просторі?

Додаткові завдання

✍ № 1. Доведіть, що рівняння $2\arccos\sqrt{1-\frac{x^2}{5}}=\arcsin\frac{2x}{5}$ має тільки цілі корені.

✍ № 2. *Проєкт.* Проаналізуйте навчальні програми з математики (https://mon.gov.ua/) для 5-9 класів та з'ясуйте: у якому класі вводиться поняття цілого числа й операцій над цілими числами, чи є відповідні означення? Чи розглядаються властивості цих операцій? Якщо так, то як вони вводяться, чи є відповідні означення? Які ще відношення можна розглянути на множині цілих чисел? Вкажіть їхні властивості. Заповніть таблицю 3.1.1. Чи єдиним чином можна зобразити ціле число?

Таблиця 3.1.1

Операція	Чи є означення		Властивості		Чи є алгебр	Компоненти	Результат
	ЧС	ШКМ	ЧС	ШКМ			
Додавання							
Множення							
Віднімання							
Ділення							

Відповіді: *Завдання для аудиторної роботи*. **№1**. а) $0\in Z$; б) $9\in N, 9\in Z$; в) $1\in N, 1\in Z$; г) $\frac{3}{2}\notin N, \frac{3}{2}\notin Z$. *Завдання для самостійної роботи.* **№1.** а) $0\in Z$; б) $-3\in Z$ (застосуйте формулу тангенс суми, попередньо записавши кути 82^0 і 142^0 як суму 22^0 і іншого доданка).

Тема 3.2. Означення системи раціональних чисел. Упорядкованість поля раціональних чисел

Теоретичні запитання

1. Означення системи раціональних чисел.
2. Властивості раціональних чисел.
4. Відношення порядку на множині раціональних чисел.

Література:

1. Вивальнюк Л. М., Григоренко В. К., Левіщенко С. С. Числові системи. К. : Вища школа, 1988. 272 с. С. 126-133

2. Кугай Н. В., Калініченко М. М. Числові системи : навчальний посібник. Видання друге, перероблене, виправлене й доповнене. Глухів, 2024. 123 с. С. 86-92

3. Лиман Ф. М. Числові системи. Навчальний посібник Суми : Видавництво "МакДен", 2010. 192 с.

4. Кугай Н. В. Методологічні знання майбутнього вчителя математики : монографія. Харків: ФОП Панов А. М., 2017. 336 с.

5. Кугай Н.В., Калініченко М.М. Підготовка майбутніх учителів математики: методологічний аспект : монографія. Харків, 2020. 522 с.

Основні теоретичні факти

Алгебраїчну структуру $(Q,\ +,\ \cdot, 0, Z)$ називають системою раціональних чисел, а її елементи – раціональними числами, якщо виконуються такі властивості (аксіоми) раціональних чисел: 1) структурні аксіоми A_p; 2) спеціальні аксіоми: а) $(Z,\ +,\ \cdot, 0)$ – кільце цілих чисел; б) $Z \subset Q$; в) Аксіома мінімальності. Нехай $M \subset Q$ і виконуються умови: 1) $Z \subset M$; 2) $\forall q_1 \in M, q_1 \neq 0\ \forall q_2 \in M \left(\dfrac{q_2}{q_1} \in M \right)$. Тоді $M = Q$.	
Властивості раціональних чисел	
З означення слідує, що:	1) $(Q,\ +)$ – адитивна група; 2) $(Q,\ +)$ – мультиплікативна група; 3) Рівняння $q_1 \cdot x = q_2$ має розв’язок на множині раціональних чисел Q для будь-яких $q_1 \neq 0, q_2$.

Кожне раціональне число є часткою двох цілих чисел	$\forall q \in Q\ \exists a \in Z\ \exists b \in Z \wedge b \neq 0 \left(q = \dfrac{a}{b} \right)$. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c,\ a,b,c,d \in Z,\ b \neq 0,\ d \neq 0$
Поле раціональних чисел Q можна архімедівськи впорядкувати і єдиним способом. Порядок в Q є продовженням порядку, визначеного в кільці цілих чисел Z.	

Навчальні завдання

✍ Приклад 1. З'ясуйте, яким числом (натуральним, цілим, раціональним) є значення виразу $\cos^2 73^0 + \cos^2 47^0 + \cos 73^0 \cos 47^0$.

○ Виокремимо у цьому виразі квадрат суми: $\cos^2 73^0 + \cos^2 47^0 + \cos 73^0 \cos 47^0 = \cos^2 73^0 + \cos^2 47^0 + 2\cos 73^0 \cos 47^0 - -\cos 73^0 \cos 47^0 = \left(\cos 73^0 + \cos 47^0\right)^2 - \cos 73^0 \cos 47^0$. Застосуємо формули перетворення суми двох тригонометричних функцій у добуток і навпаки, перетворимо добуток $\cos 73^0 \cos 47^0$ у суму. Тоді

$$\cos^2 73^0 + \cos^2 47^0 + \cos 73^0 \cos 47^0 = \left(2\cos 60^0 \cos 13^0\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\cos 26^0 + \cos 120^0\right) =$$

$$= \left(2 \cdot \frac{1}{2}\cos 13^0\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\cos 26^0 - \frac{1}{2}\right) = \cos^2 13^0 - \frac{1}{2}\cos 26^0 + \frac{1}{4} = \frac{1+\cos 26^0}{2} -$$

$-\dfrac{1}{2}\cos 26^0 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$. Отже, значення вказаного виразу є число раціональне, не є цілим і не є натуральним.

✍ Приклад 2. Доведіть, що значення виразу $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$ є число раціональне.

○ Використаємо формулу $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$. Тоді:

$$\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 = \log_3 2 \cdot \frac{\log_3 3}{\cancel{\log_3 4}} \cdot \frac{\cancel{\log_3 4}}{\cancel{\log_3 5}} \cdot \frac{\cancel{\log_3 5}}{\cancel{\log_3 6}} \cdot \frac{\cancel{\log_3 6}}{\cancel{\log_3 7}} \cdot$$

$\cdot \dfrac{\cancel{\log_3 7}}{\log_3 8} = \log_3 2 \cdot \dfrac{1}{\log_3 8} = \dfrac{\log_3 2}{\log_3 8} = \log_8 2 = \dfrac{1}{3} \in Q$, що й треба було довести.

✍ <u>Приклад 3</u>. Доведіть, що $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)\in Q$.

○ Застосуємо формули: $\cos(\arccos x)=x,\ x\in[-1;1],\ \sin x=\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$.

Оскільки $\arccos\frac{3}{5}\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, то $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\frac{3}{5}\right)}=\frac{4}{5}\in Q.$

✍ <u>Приклад 4.</u> З'ясуйте, яким числом (натуральним, цілим, раціональним) є значення виразу $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$.

○ Для розв'язування цього завдання застосуємо формули:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2,\ (a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b).$$

Позначимо вираз $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$ буквою x і піднесемо обидві частини до куба: $\left(\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}\right)^3=x^3$. Тоді $\left(\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}\right)^3+$ $+\left(\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}\right)^3+3\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}\left(\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}\right)=x^3$.

Після перетворень маємо $20+\sqrt{392}+20-\sqrt{392}+$ $+3\sqrt[3]{400-392}\left(\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}\right)=x^3$. Врахуємо заміну і спростимо: $40+6x=x^3$. Розв'яжемо рівняння $x^3-6x-40=0$. Корінь шукаємо методом добору серед дільників вільного члена. Це число $x = 4$. Інших дійсних коренів нема (перевірте!). Отже, $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}=4\in Q$.

✍ <u>Приклад 5.</u> Запишіть періодичні дроби у вигляді звичайних: 1) $0,(23)$; 2) $0,2(35)$.

○ а) 1-ий спосіб. $0,232323....=0,(23)=\frac{23}{100}+\frac{23}{10000}+...=\frac{\frac{23}{100}}{1-\frac{1}{100}}=$ $=\frac{\frac{23}{100}}{\frac{99}{100}}=\frac{23}{99}$ (сума нескінченно спадної геометричної прогресії).

2-ий спосіб. Нехай $0,232323....=x$. Помножимо обидві частини цієї рівності на 100: $23,2323....=100x$ або $23+0,2323....=100x$. Тоді $23+x=100x$. Маємо $x=\frac{23}{99}$.

б) 1-ий спосіб. $0,2(35)=\frac{2}{10}+\frac{35}{1000}+\frac{35}{100000}...=\frac{2}{10}+\frac{\frac{35}{1000}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{2}{10}+\frac{35}{990}=$

$=\frac{2\cdot 99+35}{990}=\frac{233}{990}$. 2-ий спосіб. Нехай $0,2(35)=x$. Помножимо обидві частини цієї рівності на 10: $2,(35)=10x$ або $2+0,(35)=10x$. Тоді $0,(35)=10x-2$. Тепер помножимо обидві частини рівності $0,2(35)=x$ на 1000 і врахуємо, що $0,(35)=10x-2$: $235,(35)=1000x \Rightarrow 235+10x-2=1000x \Rightarrow 233=990x \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{233}{990}$.

Завдання для аудиторної роботи

✍№ 1. З'ясуйте, яким числом (натуральним, цілим, раціональним) є значення виразу: а) $\mathrm{tg}\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)$; б) $\sin\left(\mathrm{arctg}\frac{3}{4}-\arccos\frac{12}{13}\right)$;

в) $\frac{\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-3}-4\sqrt{2}$; г) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$.

✍№ 2. Довести, що число $\sqrt{3}$ не є раціональним.

✍№ 3. Запишіть періодичні дроби у вигляді звичайних: 1) $0,(2)$; 2) $0,23(5)$.

✍№ 4. Порівняйте числа 0,7(81) і $\frac{11}{14}$.

✍. № 5. Доведіть, що значення виразу $\ln\mathrm{tg}30^0\cdot\ln\mathrm{tg}31^0\cdot...\cdot\ln\mathrm{tg}60^0$ є число раціональне.

✍№ 6. Знайти всі додатні раціональні розв'язки рівняння $x^3+y^3=x^2+y^2$

✍№ 7. Запишіть звичайні дроби у вигляді системних дробів: а) $\frac{3}{14}$; б) $\frac{2}{125}$; в) $\frac{3}{11}$.

Завдання для самостійної роботи

✍ № 1. З'ясуйте, яким числом (натуральним, цілим, раціональним) є значення виразу: а) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)+\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)$; б) $\operatorname{tg}\left(3\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$;

в) $\frac{\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-3}-4\sqrt{2}+2$; г) $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$.

✍ № 2. Який вигляд мають два дроби, якщо їхня різниця дорівнює їхньому добутку?

✍ № 3. Доведіть, що рівняння $x^3+x^2y+y^3=0$ не має раціональних коренів, крім $x = 0$, $y = 0$.

✍ № 4. Запишіть періодичні дроби у вигляді звичайних: 1) $0,(12)$; 2) $0,23(154)$.

✍ № 5. Запишіть звичайні дроби у вигляді системних дробів: а) $\frac{3}{7}$; б) $\frac{5}{6}$.

Додаткові завдання

✍ № 1. Доведіть, що будь-яке раціональне число, відмінне від нуля, є періодом функції Діріхле $D(x)$: $D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\notin Q\end{cases}$.

✍ № 2. *Проєкт.* Проаналізуйте навчальні програми з математики (https://mon.gov.ua/) для 5-9 класів та з'ясуйте: у якому класі вводиться поняття раціонального числа й операцій над цими числами, чи є відповідні означення? Чи розглядаються властивості цих операцій? Якщо так, то як вони вводяться, чи є відповідні означення? Які відношення можна розглянути на множині раціональних чисел? Вкажіть їхні властивості. Заповніть таблицю 3.2.1.

Таблиця 3.2.1

Операція	Чи є означення		Властивості		Чи є алгебр	Компоненти	Результат
	ЧС	ШКМ	ЧС	ШКМ			
Додавання							
Множення							
Віднімання							
Ділення							

Чи єдиним чином можна зобразити раціональне число?

Відповіді: *Завдання для аудиторної роботи*. **№1**. а) $\frac{5}{12}\in Q$; б) $\frac{16}{65}\in Q$; в) $-2\in Z, -2\in Q$; г) $2\in N, 2\in Z, 2\in Q$. **№3**. 1) $\frac{2}{9}$; 2) $\frac{53}{225}$. **№6**. $x=\alpha\cdot\frac{\alpha^2+1}{\alpha^3+1}$,

$y=\frac{\alpha^2+1}{\alpha^3+1}, \alpha>0, \alpha\in Q$. *Завдання для самостійної роботи.* **№1.** а) $0\in Z, 0\in Q$; б) $5.5\in Q$. в) $0\in Z, 0\in Q$; г) $3\in N, 3\in Z, 3\in Q$. **№4.** 1) $\frac{4}{33}$; 2) $\frac{23131}{99900}$.

Самостійна робота № 3 за ЗМ «Множина цілих чисел. Множина раціональних чисел»

➢ **Завдання 1** (для всіх здобувачів). Зобразіть множини натуральних, цілих, раціональних чисел за допомогою кругів Ейлера. Наведіть приклади чисел і позначте їх на побудованій діаграмі, якщо: а) число ціле, але не натуральне; б) число раціональне, але не є цілим; в) число раціональне, але не є натуральним; г) число натуральне, але не є цілим.

➢ **Завдання 2** (для всіх здобувачів). Наведіть приклад лінійного рівняння, яке: а) має розв'язок у множині цілих чисел, але не має розв'язку у множині натуральних чисел; б) має розв'язок у множині раціональних чисел, але не має розв'язку у множині цілих чисел; в) не має розв'язку у множині раціональних чисел, хоча його коефіцієнти – раціональні числа; г) має безліч розв'язків у множині цілих чисел. Розв'яжіть наведені вами рівняння.

➢ **Завдання 3.** З'ясуйте, яким числом (натуральним, цілим, раціональним) є значення виразу:

1. $\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}$;

2. $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$;

3. $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$;

4. $\mathrm{tg}\left(\arccos\frac{5}{13}\right)$;

5. $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$;

6. $\sin\left(\mathrm{arctg}\frac{3}{4}-\arcsin\frac{5}{13}\right)$;

7. $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\sqrt{15}$;

8. $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$

9. $\mathrm{tg}\left(3\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$;

10. $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$;

11. $\lg\mathrm{tg}30^0\cdot\lg\mathrm{tg}31^0\cdot\ldots\cdot\lg\mathrm{tg}60^0$;

12. $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$;

13. $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}$;

14. $\mathrm{tg}^2 10^0+\mathrm{tg}^2 50^0+\mathrm{tg}^2 70^0$;

15. $\mathrm{tg}20^0\cdot\mathrm{tg}80^0\cdot\mathrm{tg}140^0$;

16. $\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\log_7 6\cdot\log_8 7$;

17. $\sqrt{\log_6 \sqrt[5]{25} + \log_6 \sqrt[7]{49}}$;

18. $\frac{1}{2\sin 10^0} - 2\sin 70^0$;

19. $10^{2\lg 5 - \frac{1}{2}\lg 25}$;

20. $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5}$.

➢ **Завдання 4.** Запишіть періодичні дроби у вигляді звичайних дробів:

1. а) 3,(4); б) 2,3(48);
2. б) 6,(17); б) 0,61(7);
3. а) 21,(3); б) 2,1(34);
4. а) 3,(432); б) 51,4(3);
5. а) 0,(25); б) 1,43(23);
6. а) 2,(13); б) 9,21(34);
7. а) 1,(234); б) 2,34(2);
8. а) 3,(35); б) 33,5(67);
9. а) 9,(675); б) 6,7(51);
10. а) 8,(234); 8,24(4);
11. а) 2,(46); б) 3,24(6);
12. а) 45,(3); б) 0,4(53);
13. а) 6,(54); б) 6,05(4);
14. а) 0,(69); б) 0,39(6);
15. а) 3,(89); б) 0,39(8);
16. а) 5,(32); б) 0,5(32);
17. а) 6,(45); б) 6,4(5);
18. а) 3,(21); б) 0,34(2);
19. а) 2,(76); б) 0,27(6);
20. а) 1,(87); б) 0,1(87).

➢ **Завдання 5.** Запишіть звичайний дріб у вигляді системного дробу, попередньо обґрунтувавши, яким системним дробом (чистим періодичним чи мішаним періодичним) цей дріб можна записати:

1. а) $\frac{5}{13}$; б) $\frac{5}{24}$; в) $\frac{3}{25}$;
2. а) $\frac{7}{27}$; б) $\frac{7}{20}$; в) $\frac{13}{48}$;
3. а) $\frac{15}{32}$; б) $\frac{11}{23}$; в) $\frac{5}{12}$;
4. а) $\frac{6}{23}$; б) $\frac{11}{50}$; в) $\frac{5}{14}$;
5. а) $\frac{2}{75}$; б) $\frac{12}{31}$; в) $\frac{5}{8}$;
6. а) $\frac{6}{25}$; б) $\frac{13}{15}$; в) $\frac{5}{27}$;
7. а) $\frac{7}{51}$; б) $\frac{3}{40}$; в) $\frac{11}{54}$;
8. а) $\frac{7}{23}$; б) $\frac{5}{12}$; в) $\frac{3}{8}$;
9. а) $\frac{7}{15}$; б) $\frac{5}{13}$; в) $\frac{3}{40}$;
10. а) $\frac{2}{5}$; б) $\frac{7}{33}$; в) $\frac{3}{56}$;
11. а) $\frac{7}{9}$; б) $\frac{7}{32}$; в) $\frac{8}{21}$;
12. а) $\frac{3}{20}$; б) $\frac{4}{35}$; в) $\frac{5}{9}$;
13. а) $\frac{3}{26}$; б) $\frac{4}{63}$; в) $\frac{7}{8}$;
14. а) $\frac{3}{7}$; б) $\frac{2}{25}$; в) $\frac{8}{9}$;
15. а) $\frac{11}{20}$; б) $\frac{8}{35}$; в) $\frac{5}{21}$;
16. а) $\frac{5}{32}$; б) $\frac{6}{23}$; в) $\frac{7}{12}$;
17. а) $\frac{12}{23}$; б) $\frac{13}{50}$; в) $\frac{9}{14}$;
18. а) $\frac{17}{75}$; б) $\frac{17}{31}$; в) $\frac{3}{8}$;
19. а) $\frac{8}{51}$; б) $\frac{13}{40}$; в) $\frac{19}{54}$;
20. а) $\frac{7}{20}$; б) $\frac{8}{35}$; в) $\frac{8}{9}$.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 4. МНОЖИНА ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ. МНОЖИНА КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

Тема 4.1. Система дійсних чисел

Теоретичні запитання

1. Необхідність розширення поля раціональних чисел
2. Означення системи дійсних чисел
3. Властивості дійсних чисел
4. Зображення дійсних чисел

Література:

1. Вивальнюк Л. М., Григоренко В. К., Левіщенко С. С. Числові системи. К. : Вища школа, 1988. 272 с. С. 140-142, 155-175
2. Кугай Н. В., Калініченко М. М. Числові системи : навчальний посібник. Видання друге, перероблене, виправлене й доповнене. Глухів, 2024. 123 с. С. 94-104
3. Лиман Ф. М. Числові системи. Навчальний посібник Суми : Видавництво "МакДен", 2010. 192 с.
4. Кугай Н. В. Методологічні знання майбутнього вчителя математики : монографія. Харків: ФОП Панов А. М., 2017. 336 с.
5. Кугай Н.В., Калініченко М.М. Підготовка майбутніх учителів математики: методологічний аспект : монографія. Харків, 2020. 522 с.

Основні теоретичні факти

Означення
Системою *дійсних чисел* називають архімедівськи впорядковане поле, кожна фундаментальна послідовність елементів якого збігається до елемента цього самого поля, тобто таке поле $(R, +, \cdot, 0, 1, >)$, для якого виконуються такі властивості (аксіоми поля дійсних чисел): 1) структурні аксіоми A_p; 2) спеціальні аксіоми: r.1. $\forall a \in R\ \forall b \in R\ (a \neq b \Rightarrow a > b \vee b > a)$; r.2. $\forall a \in R\ (\overline{a > a})$; r.3. $\forall a \in R\ \forall b \in R\ \forall c \in R\ (a > b \vee b > c \Rightarrow a > c)$; r.4. $\forall a \in R\ \forall b \in R\ \forall c \in R\ (a > b \Rightarrow a + c > b + c)$; r.5. $\forall a \in R\ \forall b \in R\ \forall c \in R\ (a > b \wedge c > 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c)$; r.6. $\forall a \in R \wedge a > 0\ \forall b \in R\ \exists n \in N\ (n \cdot a > b)$ r.7. Для будь-якої фундаментальної послідовності (a_n) елементів з R існує в R елемент r такий, що $\lim\limits_{n \to \infty}(a_n) = r$.
Властивості
1. Поле дійсних чисел R містить підполе, ізоморфне полю раціональних

<table>
<tr><td colspan="2">чисел Q</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. У множині дійсних чисел існує корінь будь-якого натурального степеня з довільного дійсного додатного числа</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Поле дійсних чисел можна впорядкувати не більш як одним способом</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Кожне дійсне число є границя послідовності раціональних чисел</td></tr>
<tr><td colspan="2">Зображення дійсних чисел</td></tr>
<tr><td>системним дробом</td><td>ланцюговим дробом</td></tr>
<tr><td>Нехай $p \geq 2$ – натуральне число. Кожне дійсне число r можна подати і притому єдиним способом у вигляді
$$r = \pm p^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^{-k}$$
причому:
1) якщо $r > 0$, то у правій частині рівності беремо знак «+», якщо $r < 0$, то знак «$-$»;
2) якщо $r = 0$, то $n = 0 \wedge \left(\forall k \in N \cup \{0\}\right) \Rightarrow (a_k = 0)$;
3) якщо $r \neq 0$, то n і всі a_k – цілі, крім того, $a_0 > 0 \wedge (\forall k > 0 \Rightarrow 0 \leq a_k \leq p-1) \wedge \overline{\exists n_0 \forall k > n_0\ a_k = p-1}$ (умова неіснування періодичного дробу з періодом $p-1$).</td><td>Будь-якому дійсному ірраціональному числу відповідає єдиний нескінченний ланцюговий дріб, що має це число своїм значенням. Навпаки, будь-який нескінченний ланцюговий дріб визначає одне і тільки одне дійсне ірраціональне число.
Отже, будь-яке дійсне число можна записати ланцюговим дробом: раціональне число – скінченним ланцюговим дробом, ірраціональне – нескінченним ланцюговим дробом.</td></tr>
</table>

Навчальні завдання

✍ № 1. Доведіть, що число $\sqrt{3}$ є ірраціональним.

○ Припустимо, що число $\sqrt{3}$ є раціональним. Тоді його можна записати у вигляді нескоротного дробу, тобто $\sqrt{3} = \dfrac{m}{n}$, НСД$(m, n) = 1$. Піднесемо обидві частини рівності до квадрата і запишемо як $3n^2 = m^2$. Оскільки $3n^2 \vdots 3$, то й $m^2 \vdots 3$. Але тоді $m \vdots 3$ і $m = 3p,\ p \in N$. Підставивши $m = 3p$ у рівність $3n^2 = m^2$ маємо: $3n^2 = 9p^2 \Rightarrow n^2 = 3p^2$. З останньої рівності слідує, що n кратне 3. А це суперечить припущенню, дріб $\dfrac{m}{n}$ нескоротний. Прийшли до суперечності. Причина суперечності – припущення, що число $\sqrt{3}$ є раціональним. Отже, $\sqrt{3}$ – число ірраціональне.

✍ № 2. З'ясуйте, до якої числової множини належить число, що є значенням виразу $\sin\left(\arcsin\frac{2}{3}+\arccos\frac{1}{3}\right)$.

○ Застосуємо формулу для синуса суми двох аргументів:

$$\sin\left(\arcsin\frac{2}{3}+\arccos\frac{1}{3}\right)=\sin\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)\cos\left(\arccos\frac{1}{3}\right)+\cos\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right).$$

Оскільки $\sin(\arcsin x)=x, \cos(\arccos x)=x, x\in[-1;1]$, то $\sin\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$, $\cos\left(\arccos\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$. Оскільки $\arcsin\frac{2}{3}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, то $\cos\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)=$ $=\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$. Аналогічно, $\arccos\frac{1}{3}\in[0;\pi]\Rightarrow$ $\Rightarrow\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\frac{1}{3}\right)}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Отже,

$$\sin\left(\arcsin\frac{2}{3}+\arccos\frac{1}{3}\right)=\sin\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)\cos\left(\arccos\frac{1}{3}\right)+\cos\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)=$$

$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{2+2\sqrt{10}}{9}$. Маємо, що $\frac{2+2\sqrt{10}}{9}\in I$, $\frac{2+2\sqrt{10}}{9}\in R.$

✍ № 3. Доведіть, що число $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ є ірраціональним.

○ Припустимо, що число $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ є раціональним і дорівнює x, тобто $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\;=\;x$. Тоді $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}=x\Rightarrow\sqrt[3]{3}=x-\sqrt{2}\Rightarrow 3=\left(x-\sqrt{2}\right)^3$. Перетворимо записану рівність: $3=x^3-3x^2\sqrt{2}+6x-2\sqrt{2}$; $(3x^2+2)\sqrt{2}=x^3+6x-3$; $\left((3x^2+2)\sqrt{2}\right)^2=\left(x^3+6x-3\right)^2$; $(9x^4+12x^2+4)\cdot 2=x^6+36x^2+9+12x^4-6x^3-$ $-36x$. Після розкриття дужок і зведення подібних доданків маємо: $x^6-6x^4+6x^3+12x^2-36x+1=0$. Це зведене алгебраїчне рівняння з цілими коефіцієнтами. Якщо воно має раціональні корені, то вони є цілими числами і є дільниками вільного члена, тобто, це має бути 1 або – 1. Число $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ є коренем цього рівняння за побудовою і не дорівнює ні 1, ні – 1. Отже, це число ірраціональне.

✍ № 4. Запишіть числа у вигляді ланцюгового дробу:

а) 1,234444……; б) $\sqrt{5}$.

○ а) Число 1,234444……є періодичним системним дробом, тому воно є зображенням раціонального числа. Представимо спочатку це число у вигляді звичайного дробу: 1,234444……= $1,23(4)=1\frac{234-23}{900}=1\frac{211}{900}$. Дробову частину запишемо у вигляді оберненого дробу: $1+\frac{211}{900}=1+\frac{1}{\frac{900}{211}}$. Тепер виконаємо аналогічну роботу над дробом $\frac{900}{211}$: $\frac{900}{211}=4+\frac{56}{211}=4+\frac{1}{\frac{211}{56}}$. Далі аналогічно: $\frac{211}{56}=3+\frac{43}{56}=3+\frac{1}{\frac{56}{43}}$, $\frac{56}{43}=1+\frac{13}{43}=1+\frac{1}{\frac{43}{13}}$, $\frac{43}{13}=3+\frac{4}{13}=3+\frac{1}{\frac{13}{4}}$, $\frac{13}{4}=3+\frac{1}{4}$.

Тепер запишемо все разом:

$$1,23(4)=1+\frac{1}{\frac{900}{211}}=1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\frac{211}{56}}}=1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\frac{56}{43}}}}=1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{43}{13}}}}}=1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\frac{13}{4}}}}}}=.$$

$$=1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}}}}.$$

Короткий запис одержаного ланцюгового дробу $[1;4,3,1,3,3,4]$. Маємо скінченний ланцюговий дріб.

б) $\sqrt{5}$ – квадратична ірраціональність, число ірраціональне. Відомо, що це число можна записати у вигляді періодичного ланцюгового дробу. Виокремимо цілу частину і запишемо у вигляді елемента ланцюгового дробу: $\sqrt{5}=2+\varepsilon_0=2+\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_0}}=2+\frac{1}{q_1}, q_1=\frac{1}{\varepsilon_0}$, де $0<\varepsilon_0<1$, тому $q_1>1$. З рівності

$\sqrt{5}=2+\dfrac{1}{q_1}$ обчислимо цілу частину числа q_1: $\dfrac{1}{q_1}=\sqrt{5}-2\Rightarrow q_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}=$ $\dfrac{\sqrt{5}+2}{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)}=\sqrt{5}+2=4+\dfrac{1}{q_2}$. Отже, на цьому етапі $\sqrt{5}=2+\dfrac{1}{q_1}=2+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{q_2}}$. З рівності $\sqrt{5}+2=4+\dfrac{1}{q_2}$ обчислимо цілу частину числа q_2: $\sqrt{5}-2=\dfrac{1}{q_2}\Rightarrow q_2=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}=q_1$. Як бачимо, далі числа будуть повторюватися. Маємо: $\sqrt{5}=\left[2,4,4,...\right]$ або $\sqrt{5}=\left[2;(4)\right]$.

Завдання для аудиторної роботи

✍№ 1. Доведіть, що задані числа ірраціональні: а) $\sqrt{5}$; б) $\sin 60^0$; в) $\lg 2$.

✍№ 2. З’ясуйте, до якої числової множини належать числа, що є значеннями вказаних виразів: а) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$; б) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; в) $\cos 10^0\cos 50^0\cos 70^0$.

✍№ 3. Запишіть у вигляді ланцюгового дробу вказані числа:

а) 3,2333……; б) $\sqrt{11}$; в) $\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$.

✍№ 4. Чи є операція додавання (віднімання) алгебраїчними у множині ірраціональних чисел? Відповідь обґрунтуйте.

✍№ 5. Чи є операція піднесення до степеня в *I* алгебраїчною операцією? Відповідь обґрунтуйте.

✍№ 6. Доведіть, що добуток $\alpha\beta$ і частка $\dfrac{\alpha}{\beta}$ раціонального числа $\alpha\,(\alpha\neq 0)$ й ірраціонального числа р β є числа ірраціональні.

✍№ 7. Нехай α і β – ірраціональні, а $\alpha+\beta$ – раціональне. Покажіть, що числа $\alpha-\beta$ і $\alpha+2\beta$ є ірраціональними.

✍№ 8. Доведіть, що число $5^{\frac{3-\lg 5}{\lg 25}}$ є ірраціональним.

Завдання для самостійної роботи

✍№ 1. Доведіть, що задані числа ірраціональні: а) $\sqrt{7}$; б) $\cos 30^0$; в) $\lg 2$

✍№ 2. З’ясуйте, до якої числової множини належать числа, що є значеннями вказаних виразів: а) $\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$; б) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; в) $\sin\left(\frac{\pi}{36}\right)\sin\left(\frac{13\pi}{36}\right)\cos\left(\frac{7\pi}{36}\right)$.

✍№ 3. Запишіть у вигляді ланцюгового дробу вказані числа:
а) 2,54444……; б) $\sqrt{13}$; в) $\frac{7-\sqrt{5}}{3}$.

✍№ 4. Чи є операція множення (ділення) алгебраїчними у множині ірраціональних чисел? Відповідь обґрунтуйте.

✍№ 5. Доведіть, що сума і різниця раціонального числа α і ірраціонального числа β є числа ірраціональні.

✍№ 6. Доведіть, що значення виразу $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5$ є число ірраціональне.

Додаткові завдання

✍№ 1. Чи сумірні: а) гіпотенуза і катет прямокутного трикутника, якщо, один з його гострих кутів дорівнює 30°? б) сторона і висота рівностороннього трикутника?

✍№ 2. Координати центра кола в прямокутній системі координат є ірраціональними числами. Доведіть, що в таке коло не можна вписати трикутник, усі вершини якого мають раціональні координати.

👓 № 3. *Проєкт.* Проаналізуйте навчальні програми з математики (https://mon.gov.ua/) для 5-9 класів та з’ясуйте: у якому класі вводиться поняття ірраціонального числа й операцій над цими числами, чи є відповідні означення? Чи розглядаються властивості цих операцій? Якщо так, то як вони вводяться, чи є відповідні означення? Які відношення можна розглянути на множині ірраціональних чисел? Вкажіть їхні властивості. Заповніть таблицю 4.1.1. Дайте відповіді на ці запитання для множини дійсних чисел. Заповніть аналогічну таблицю для дійсних чисел. Чи єдиним чином можна зобразити ірраціональне число? Дійсне число?

Таблиця 4.1.1

Операція	Чи є означення		Властивості		Чи є алгебр	Компоненти	Результат
	ЧС	ШКМ	ЧС	ШКМ			
Додавання							
Множення							
Віднімання							
Ділення							

Відповіді: *Завдання для аудиторної роботи*. **№2**. а) $3-2\sqrt{2}\in I, 3-2\sqrt{2}\in R$; б) $\sqrt{2}+\sqrt{3}\in I, \sqrt{2}+\sqrt{3}\in R$; в) $\frac{\sqrt{3}}{8}\in I, \frac{\sqrt{3}}{8}\in R$ (*Вказівка*: доведіть і застосуйте формулу $\cos x\cdot\cos(60^0-x)\cdot\cos(60^0+x)=\frac{1}{4}\cos 3x$). **№3**. а) $[3;4,3,2]$; б) $[3;(3,6)]$. **№4**. Ні. **№5.** Ні. *Завдання для самостійної роботи.* **№2.** а) $9-4\sqrt{5}\in I, 9-4\sqrt{5}\in R$; б) $\sqrt{3}-\sqrt{2}\in I, \sqrt{3}-\sqrt{2}\in R$; в) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{16}\in I, \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{16}\in R$ (*Вказівка*: доведіть і застосуйте формулу $\sin x\cdot\sin(60^0-x)\cdot\sin(60^0+x)=\frac{1}{4}\sin 3x$). **№3**. а) $[2;1,1,5,8]$; 2) $[3;(1,1,1,1,6)]$. **№4**. Ні.

Тема 4.2. Система комплексних чисел

Теоретичні питання

1. Означення системи комплексних чисел. Властивості системи комплексних чисел
2. Зображення комплексних чисел
3. Операції над комплексними числами
4. Формула Муавра
5. Корінь *n*-ого степеня з комплексного числа
6. Геометрична інтерпретація деяких рівнянь і нерівностей з комплексними числами

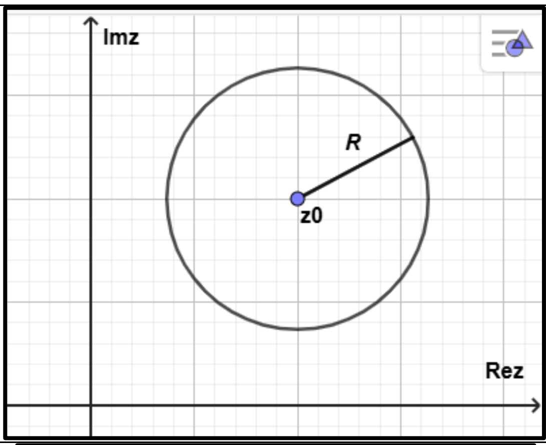
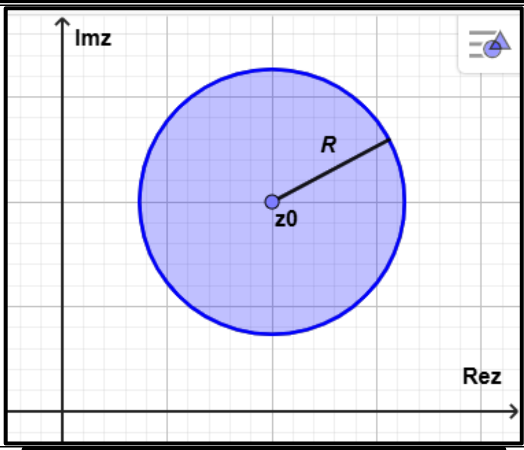
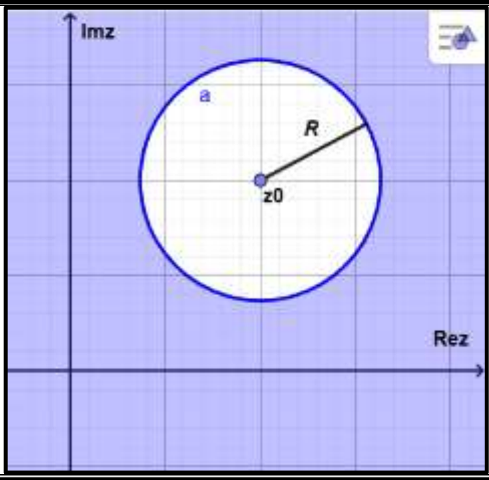
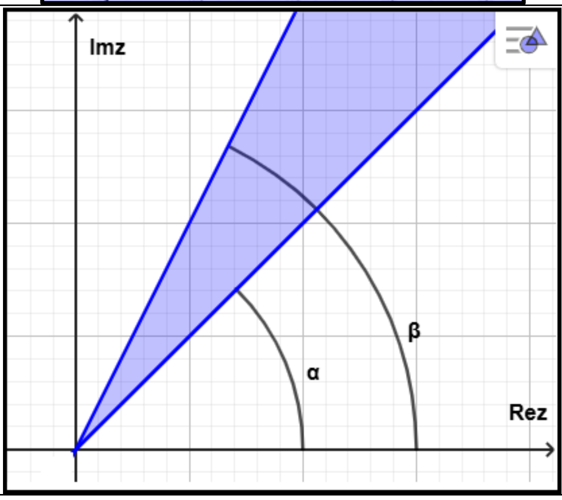
Література:

1. Вивальнюк Л. М., Григоренко В. К., Левіщенко С. С. Числові системи. К. : Вища школа, 1988. 272 с. С. 181-191
2. Кугай Н. В., Калініченко М. М. Числові системи : навчальний посібник. Видання друге, перероблене, виправлене й доповнене. Глухів, 2024. 123 с. С. 105-108
3. Лиман Ф. М. Числові системи. Навчальний посібник Суми : Видавництво "МакДен", 2010. 192 с.
4. Кугай Н. В., Борисов Є. М., Шелудько В. І. Основи комплексного аналізу (практикум) : навчально-методичний посібник. Харків : ФОП Панов А. М., 2017. 120 с.
5. Кугай Н. В. Методологічні знання майбутнього вчителя математики : монографія. Харків: ФОП Панов А. М., 2017. 336 с.
6. Кугай Н.В., Калініченко М.М. Підготовка майбутніх учителів математики: методологічний аспект : монографія. Харків, 2020. 522 с.

Основні теоретичні факти

Означення
Системою *комплексних чисел* називають поле (C, +, $\cdot$, 0, 1, i, R), для якого справджуються такі властивості (аксіоми поля комплексних чисел): 1) структурні аксіоми A_p; 2) спеціальні аксіоми: с.1) (R, +, $\cdot$, 0, >) – поле дійсних чисел; с.2) $R \subset C$; с.3) $i \in C \wedge i^2 + 1 = 0$; с.4) Аксіома мінімальності. Нехай $M \subset C$ і виконуються такі властивості: а) $R \subset M$; б) $i \in M$; б) $\forall z_1 \in M\ \forall z_2 \in M\ (z_1 + z_2 \in M \wedge z_1 \cdot z_2 \in M)$. Тоді $M = C$.
Властивості множини комплексних чисел
1. $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$
2. Поле комплексних чисел не можна впорядкувати

<table>
<tr><th colspan="2">Зображення комплексних чисел</th></tr>
<tr><td>Алгебраїчна форма</td><td>$z=a+bi,\ a,b\in R,\ a=\operatorname{Re}z,\ b=\operatorname{Im}z$</td></tr>
<tr><td>Тригонометрична форма</td><td>$z=\ |z|\left(\cos\left(\arg z\right)+i\sin\left(\arg z\right)\right)$, де
$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$
$$\arg z=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a},\ \text{якщо } a>0;\\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}+\pi,\ \text{якщо } a<0, b\ge 0;\\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}-\pi,\ \ \text{якщо } a<0,\ b<0;\\ \dfrac{\pi}{2},\ \text{якщо } a=0;\ b>0;\\ -\dfrac{\pi}{2},\ \text{якщо } a=0,\ b<0.\end{cases}$$</td></tr>
<tr><td>Показникова форма</td><td>$z=r\cdot e^{i\varphi}$, де $r=|z|,\ \varphi=\arg z$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Операції над комплексними числами</th></tr>
<tr><td colspan="2">Унарна операція – знаходження спряженого числа: $z=a+bi$, йому спряжене $\bar{z}=a-bi$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Бінарні операції ($z_1=a_1+b_1 i$, $z_2=a_2+b_2 i$)</td></tr>
<tr><td>Додавання</td><td>$z_1+z_2=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)$</td></tr>
<tr><td>Віднімання</td><td>$z_1-z_2=(a_1-a_2)+i(b_1-b_2)$</td></tr>
<tr><td>Множення</td><td>$z_1\cdot z_2=(a_1\cdot a_2-b_1\cdot b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1)$
$z_1\cdot z_2=|z_1|\cdot|z_2|(\cos(\arg z_1+\arg z_2)+i\sin(\arg z_1+\arg z_2))$</td></tr>
<tr><td>Ділення</td><td>$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1\cdot\bar{z}_2}{z_2\cdot\bar{z}_2},\ z_2\ne 0$
$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}\cdot(\cos(\arg z_1-\arg z_2)+i\sin(\arg z_1-\arg z_2))$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Формула Муавра</th></tr>
<tr><td colspan="2">$z^n=|z|^n(\cos(n\arg z)+i\sin(n\arg z))$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Корінь n-ого степеня з комплексного числа</th></tr>
<tr><td colspan="2">$$z=\sqrt[n]{w}=\sqrt[n]{|w|}_{+}\left(\cos\frac{\arg w+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\arg w+2\pi k}{n}\right),\ \ k=0,1,\ldots,n-1,$$
де через $\sqrt[n]{|w|}_{+}$ позначено арифметичне значення кореня з додатного числа</td></tr>
</table>

$\lvert z-z_0\rvert = R$ Коло з центром в точці z_0 і радіуса R	
$\lvert z-z_0\rvert \le R$ Круг з центром в точці z_0 і радіуса R	
$\lvert z-z_0\rvert \ge R$	
$\alpha \le \arg z \le \beta$	

Навчальні завдання

✍ № 1. Доведіть рівності: а) $\operatorname{Re}(z_1+z_2)=\operatorname{Re}z_1+\operatorname{Re}z_2$; б) $\operatorname{Re}iz=-\operatorname{Im}z$.

○Нехай $z=x+iy,\ \ z_1=x_1+iy_1,\ \ z_2=x_2+iy_2$. Тоді:

а) $z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2), \operatorname{Re}(z_1+z_2)=x_1+x_2; \operatorname{Re}z_1=x_1; \operatorname{Re}z_2=x_2.$ Отже, $\operatorname{Re}(z_1+z_2)=\operatorname{Re}z_1+\operatorname{Re}z_2$.

б) $iz=i(x+iy)=ix-y=-y+ix;\ \operatorname{Re}iz=-y;\ \operatorname{Im}z=y.$Отже, $\operatorname{Re}iz=-\operatorname{Im}z$.

✍ № 2. Нехай $z=x+iy$. Доведіть, що $z\cdot\overline{z}=x^2+y^2$.

○ $z\cdot\overline{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2-xyi+xyi-i^2y^2=x^2+y^2$.

✍ № 3. Обчисліть: а) $1+2i-\dfrac{3+4i}{2-i}$; б) i^5.

○ а) $1+2i-\dfrac{3+4i}{2-i}=1+2i-\dfrac{(3+4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=1+2i-\dfrac{6+3i+8i+4i^2}{4+1}=1+2i-$
$-\dfrac{2+11i}{5}=1+2i-\dfrac{2}{5}-\dfrac{11}{5}i=\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{5}i.$

б) $i^5=i^2\cdot i^2\cdot i=-1\cdot(-1)\cdot i=i$.

✍ № 4. Розв’яжіть рівняння: а) $2z+(3-i)\overline{z}=5+4i$; б) $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$.

○ а) Спростимо праву частину рівняння, позначивши $z=x+iy$:

$2z+(3-i)\overline{z}=2(x+iy)+(3-i)(x-iy)=2x+2iy+3x-3iy-ix-y=$
$=(5x-y)+i(-x-y).$ Враховуючи умову рівності двох комплексних чисел, складемо систему $\begin{cases}5x-y=5;\\-x-y=4.\end{cases}$ Її розв’язок $x=\dfrac{1}{6};\ y=-4\dfrac{1}{6}$. Отже, розв’язок рівняння: $z=\dfrac{1}{6}-4\dfrac{1}{6}i$.

б) $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$. Це квадратне рівняння. Обчислимо дискримінант:
$D=b^2-4ac=\left(2\sqrt{3}\right)^2-4\cdot1\cdot4=12-16=-4$. Тоді $\sqrt{D}=\sqrt{-4}=\sqrt{-1\cdot4}=2i$.

Маємо два розв’язки: $z_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{2\sqrt{3}\pm2i}{2}=\left[\begin{array}{l}\sqrt{3}+i\\ \sqrt{3}-i\end{array}\right.$

✍ № 5. Знайдіть модуль, головне значення аргумента комплексного числа і запишіть число у тригонометричній і показниковій формі**:** а) $z = 4 + 3i$ б) $z = -\cos\dfrac{\pi}{5} + i\sin\dfrac{\pi}{5}$.

○ а) Знайдемо модуль комплексного числа: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$. Оскільки $x = 4 > 0$, то $\arg z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$. Тоді тригонометрична форма $z = 5\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}\right) + i\sin\left(\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}\right)\right)$, показникова форма $z = 5 \cdot e^{i\operatorname{arctg}\frac{3}{4}}$.

б) Знайдемо модуль комплексного числа:

$|z| = \sqrt{\left(-\cos\dfrac{\pi}{5}\right)^2 + \left(\sin\dfrac{\pi}{5}\right)^2} = 1$. Оскільки $x = -\cos\dfrac{\pi}{5} < 0$, $y = \sin\dfrac{\pi}{5} > 0$, то

$\arg z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi = \operatorname{arctg}\dfrac{\sin\frac{\pi}{5}}{-\cos\frac{\pi}{5}} + \pi = -\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{5}\right) + \pi = -\dfrac{\pi}{5} + \pi = \dfrac{4\pi}{5}$. Тоді тригонометрична форма $z = \cos\dfrac{4\pi}{5} + i\sin\dfrac{4\pi}{5}$, показникова форма $z = e^{\frac{4\pi}{5}i}$.

✍ № 6. Обчисліть $(2 - 2i)^{10}$.

○ Запишемо комплексне число $z = 2 - 2i$ в тригонометричній формі:

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, головне значення аргумента $\arg z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \operatorname{arctg}(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$. Тоді $2 - 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$. За формулою Муавра маємо $(2-2i)^{10} = 2^{15}\left(\cos\dfrac{-10\pi}{4} + i\sin\dfrac{-10\pi}{4}\right) =$

$= 2^{15}\left(\cos\dfrac{-5\pi}{2} + i\sin\dfrac{-5\pi}{2}\right) = 2^{15}(0 - i) = -2^{15}i$.

✍ № 7. Знайдіть всі значення кореня $\sqrt[3]{-1+i}$.

○ Запишемо комплексне число $-1+i$ в тригонометричній формі: модуль комплексного числа $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$, головне значення аргументу $\arg z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi = -\operatorname{arctg}1 + \pi = \dfrac{3\pi}{4}$. Тоді $-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

Застосуємо формулу знаходження кореня *n*-ого степеня з комплексного числа: $z=\sqrt[3]{-1+i}=\sqrt[3]{{}_{+}\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\sin\dfrac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}\right)=$

$$=\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\sin\dfrac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}\right),\quad k=0;1;2.$$

Якщо $k=0$, то

$$z=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt[6]{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(1+i);$$

якщо $k=1$, то $z_1=\sqrt[6]{2}(\cos\dfrac{\frac{3\pi}{4}+2\pi}{3}+i\sin\dfrac{\frac{3\pi}{4}+2\pi}{3})=\sqrt[6]{2}(\cos\dfrac{11\pi}{12}+i\sin\dfrac{11\pi}{12})$;

якщо $k=2$, то $z_2=\sqrt[6]{2}(\cos\dfrac{\frac{3\pi}{4}+4\pi}{3}+i\sin\dfrac{\frac{3\pi}{4}+4\pi}{3})=\sqrt[6]{2}(\cos\dfrac{19\pi}{12}+i\sin\dfrac{19\pi}{12})$.

✍ № 8. Зобразіть множину точок на площині комплексної змінної, які визначаються умовами: а) $|z|\geq 5$; б) $1<|z+i|<2$, $\dfrac{\pi}{4}\leq\arg z\leq\dfrac{3\pi}{4}$.

○ Оскільки $|z-z_0|$ дорівнює відстані між точками z і z_0, то:

а) нерівність $|z|\geq 5$ визначає множину точок всієї комплексної площини, з якої вирізано круг з центром у початку координат і радіуса 5 (рис. 4.2.1).

б) нерівність $1<|z+i|<2$ визначає кільце, обмежене колами з центром в точці $-i$ і радіусами 1 та 2 (не включаючи самих кіл); нерівність $\dfrac{\pi}{4}\leq\arg z\leq\dfrac{3\pi}{4}$ визначає частину площини, обмежену двома променями $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ та $\varphi=\dfrac{3p}{4}$. Отже, обидві нерівності $1<|z+i|<2$, $\dfrac{\pi}{4}\leq\arg z\leq\dfrac{3\pi}{4}$ визначають частину кільця, обмежену променями $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ та $\varphi=\dfrac{3p}{4}$ і колами з центром в точці $-i$ та радіусами 1 та 2 (не включаючи самих кіл) (рис. 4.2.2).

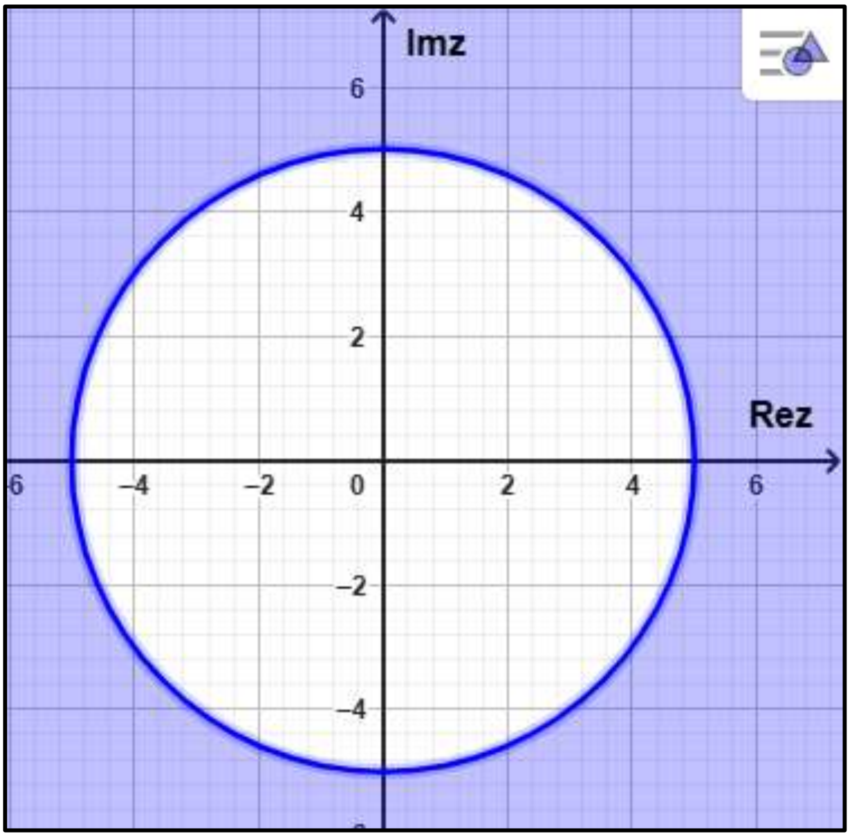


Рис. 4.2.1. $|z| \geq 5$

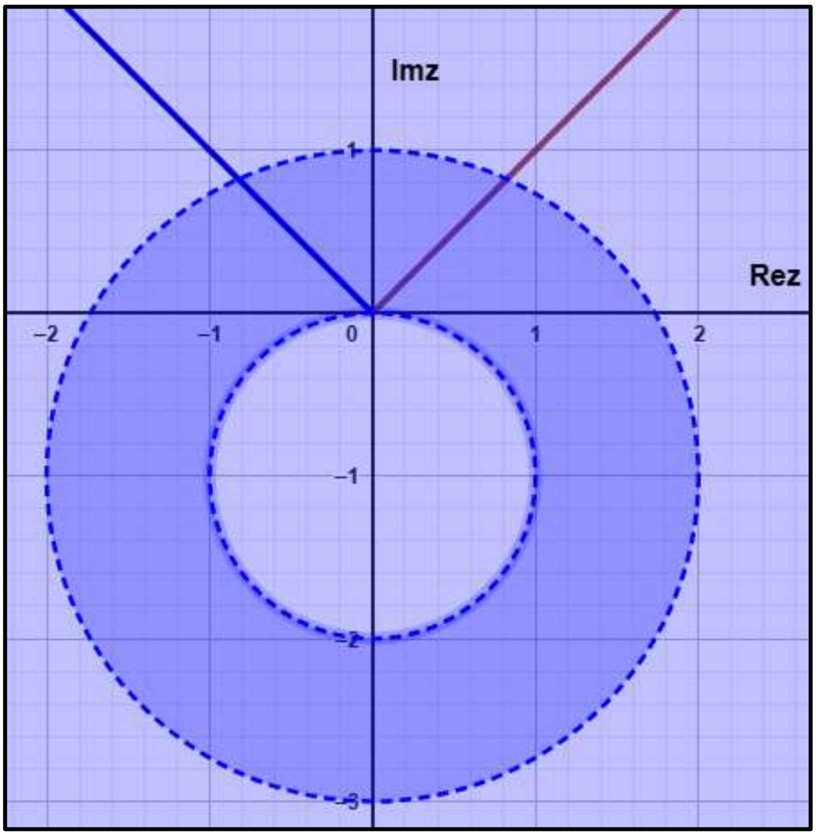


Рис. 4.2.2. $1 < |z+i| < 2$, $\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4}$

Завдання для аудиторної роботи

✍№ 1. Чи буде унарна операція – знаходження спряженого числа – алгебраїчною у множині комплексних чисел? Відповідь обґрунтуйте.

✍№ 2. Чи буде унарна операція – знаходження кореня *n*-ого степеня з комплексного числа – алгебраїчною у множині комплексних чисел? Відповідь обґрунтуйте.

✍№ 3. Чи означаються для комплексних чисел відношення «більше»? «менше»?

✍№ 4. Доведіть рівності: а) $\operatorname{Im}(z_1+z_2)=\operatorname{Im}z_1+\operatorname{Im}z_2$; б) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$; $z,\ z_1,\ z_2\in C$.

✍№ 5. Обчисліть: а) $(1-\sqrt{3}\,i)+(1+\sqrt{2}\,i)$; б) $(1+2i)(-3+4i)$;

в) $\dfrac{4+i}{2-i}+\dfrac{5-2i}{3+i}$.

✍№ 6. Розв'яжіть рівняння: а) $z^2-2z+5=0$; б) $z\cdot\overline{z}+(z-\overline{z})=3+2i$ в) $z+\overline{z}+i\left(z-\overline{z}\right)=5+3i$; г) $(1-i)z^2-(3+3i)z+(-4+2i)=0$.

✍№ 7. Знайдіть модуль, головне значення аргумента комплексного числа і запишіть число у тригонометричній і показниковій формі**:** а) $z=\sqrt{5}-2i$; б) $z=\sqrt{3}-i$; в) $z=$ 1- $\sqrt{3}i$; г) $z=$ 1+ $\sqrt{3}i$.

✍№ 8. Обчисліть: а) $\dfrac{(1+i)^{12}}{(1-i)^8}$; б) $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^{27}}{(\sqrt{3}-i)^{24}}$; в) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$.

✍№ 9. Обчисліть: а) $\sqrt[6]{\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$; б) $\sqrt[4]{-1}$; в) $\sqrt{i}$; г) $\sqrt[4]{-i}$.

✍№ 10. Зобразіть множину точок на площині комплексної змінної, які визначаються умовами: а) $|z-1|\ge 5$; б) $\dfrac{1}{|z|}\ge 1,\ z\ne 0$; в) $\left|\dfrac{1}{z}\right|\le 2,\ z\ne 0$; г) $|z-2i|=3$; д) $2<|z|<3,\ \dfrac{\pi}{8}<\arg z<\dfrac{4\pi}{3}$ (Доцільно застосувати програмні засоби математики, наприклад, GeoGebra, Desmos тощо).

✍№ 11. Розв'яжіть рівняння: а) $z^3+3z^2+3z+1=0$; б) $z^6-4z^3+8=0$.

✍№ 12. Доведіть, що модуль добутку двох комплексних чисел $z=a+bi,\ t=c+di$ дорівнює добутку модулів цих чисел, тобто: $\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$.

✍ № 13. Знайдіть числа, спряжені зі своїм кубом.

✍ № 14. Розв’яжіть систему рівнянь $\begin{cases} |z-2i| = |z|, \\ |z-i| = |z-1|. \end{cases}$

✍ № 15. Вкажіть, які лінії визначаються наступними рівняннями, і побудуйте ці лінії: а) $\operatorname{Im} z^2 = 2$; б) $2z \cdot \overline{z} + (2+i)z + (2-i)\overline{z} = 2$; в) $z^2 + \left(\overline{z}\right)^2 = 1$.

Завдання для самостійної роботи

✍ № 1. Чи буде унарна операція – піднесення до цілого степеня – алгебраїчною у множині комплексних чисел? Відповідь обґрунтуйте.

✍ № 2. Доведіть рівності: а) $\operatorname{Im} iz = \operatorname{Re} z$; б) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $z,\ z_1,\ z_2 \in C$.

✍ № 3. Обчисліть: а) $(3-2i)-(1-2i)$; б) $\dfrac{4+5i}{2-i}$; в) $\dfrac{7-i}{3+i} + \dfrac{1+i}{1-i}$.

✍ № 4. Розв’яжіть рівняння: а) $z^2 - 2z + 2 = 0$; б) $z^2 - (4+3i)z + (1+5i) = 0$; в) $z = \overline{z}$; г) $z^2 + \overline{z} = 0$.

✍ № 5. Знайдіть модуль, головне значення аргумента комплексного числа і запишіть число у тригонометричній і показниковій формі**:** а) – 2; б) 2i; в)$-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$; г) $1 - \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

✍ № 6. Обчисліть: а) $\left(\sqrt{3} - 3i\right)^6$; б) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{16}$.

✍ № 7. Обчисліть: а) $\sqrt[6]{\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i}$; б) $\sqrt[4]{i}$; в) $\sqrt{-1}$; г) $\sqrt{1}$; д) $\sqrt[3]{1+i}$.

✍ № 8. Зобразіть множину точок на площині комплексної змінної, які визначаються умовами: а) $|z + 2| < 5$; б) $\dfrac{1}{|z|} \geq 4,\ z \neq 0$; в) $\left|\dfrac{1}{z}\right| \leq 1,\ z \neq 0$;

г) $|z+i| = 2$; д) $1 < |z| < 4,\ \dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{5\pi}{4}$ (Доцільно застосувати програмні засоби математики, наприклад, GeoGebra, Desmos тощо).

✍ № 9. Розв’яжіть рівняння: а) $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z - 15 = 0$; б) $z^4 + 3z^2 - 4 = 0$.

✍ № 10. Доведіть, що модуль суми двох комплексних чисел $z = a + bi$, $t = c + di$ не перевищує суми модулів цих чисел, тобто $|z+t| \leq |z| + |t|$.

✍ № 11. Знайдіть всі комплексні числа, кожне з яких спряжене з своїм квадратом.

✍ № 12. Розв’яжіть системуу рівнянь $\begin{cases} \left|z^2-2i\right|=4, \\ \left|\dfrac{z+1+i}{z-1-i}\right|=1. \end{cases}$

✍ № 13. Вкажіть, які лінії визначаються заданими рівняннями, і побудуйте ці лінії: а) $\operatorname{Im} z^2 = 4$; б) $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$; в) $\operatorname{Re}\left(\overline{z^2}\right)=1$.

Додаткові завдання

✍ № 1. Обчисліть $z^{167}+\dfrac{1}{z^{167}}$, якщо z є коренем рівняння $z+\dfrac{1}{z}=1$.

✍ № 2. Чи єдиним чином можна зобразити комплексне число? Відповідь обґрунтуйте.

✍ № 3. Скільки коренів (з врахуванням кратності, тобто: яка кратність кореня, стільки разів він рахується коренем) має квадратне рівняння у множині комплексних чисел? Дійсних чисел? Раціональних чисел?

✍ № 4. Знайдіть аргумент комплексного числа z^3+z^2, якщо $z=\cos\varphi+i\sin\varphi, 0\le\varphi\le\pi$.

✎ № 5. *Проєкт.* Проаналізуйте навчальні програми з математики (https://mon.gov.ua/) для 10-11 класів та з’ясуйте: у якому класі вводиться поняття комплексного числа й операцій над цими числами, чи є відповідні означення? Чи розглядаються властивості цих операцій? Якщо так, то як вони вводяться, чи є відповідні означення? Які відношення можна розглянути на множині комплексних чисел? Вкажіть їхні властивості. Заповніть таблицю 4.2.1. Чи можна множину комплексних чисел упорядкувати? Відповідь обґрунтуйте.

Таблиця 4.2.1

Операція	Чи є означення		Властивості		Чи є алгебр	Компоненти	Результат
	ЧС	ШКМ	ЧС	ШКМ			
Додавання							
Множення							
Віднімання							
Ділення							

Відповіді: *Завдання для аудиторної роботи*. **№1**. Так. **№2**. Ні. **№5.** б) $-11-2i$; в) $\dfrac{27}{10}+\dfrac{1}{10}i$. **№6**. б) $\sqrt{2}+i,-\sqrt{2}+i$; г) $1+2i,-1+i$. **№8**. *Вказівка:* кожне з чисел запишіть у тригонометричній формі і застосуйте формулу Муавра. а) – 4; б) – 8. **№9.** *Вказівка:* кожне з чисел запишіть у тригонометричній формі і застосуйте формулу знаходження кореня *n*-

го степеня з комплексного числа. б) $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$. **№10.** б) круг з центром в точці z = 0 (без цього центра) і радіуса 1; д) частина кільця (без дуг кіл з центром в точці z = 0 і радіусами 2 і 3 відповідно), що міститься у куті між променями, початки яких у точці z = 0 і які утворюють з додатним напрямом осі абсцис кути $\frac{\pi}{8}$ і $\frac{4\pi}{3}$ відповідно (межі не належать множині). **№11.** а) – 1; б) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$, $-1+i$, $\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$, $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right)$, $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$, $-1-i$. **№13.** 0; 1; – 1; i; – i. **№14.** $1+i$. **№15.** а) гіпербола $xy=1$; б) коло $(x+1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$; в) гіпербола $x^2-y^2=\frac{1}{2}$.

Завдання для самостійної роботи. **№1.** Так. **№3**. б) $\frac{3}{5}+\frac{14}{5}i$; в) 2. **№4.** б) $3+2i, 1+i$; г) $0, -1, \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **№6.** 1. **№7.** а) 6 різних значень, які отримуємо з виразу $\cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi n}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi n}{6}\right)$ для $n=0;1;2;3;4;5$; в) i, – i; г) 1, 1. **№8.** а) круг з центром в точці z = 2 і радіуса 5 (без кола); в) зовнішня частина круга з центром в точці z = 0 і радіуса (включаючи коло). **№9.** а) $-1, 3, 1+2i, 1-2i$; б) $1, -1, 2i, 2i$. **№11.** $0, 1, -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **№12.** $1-i, -1+i$. **№13.** а) гіпербола $xy=2$; б) коло $x^2+(y+1)^2=1$ без точки (0;0); в) гіпербола $x^2-y^2=1$.

Тема 4.3. Алгебра кватерніонів

Теоретичні питання

1. Поняття кватерніона
2. Алгебра кватерніонів: поняття, розмірність, базис
3. Операції над кватерніонами

Література:

1. Вивальнюк Л. М., Григоренко В. К., Левіщенко С. С. Числові системи. К. : Вища школа, 1988. 272 с. С. 185-191
2. Кугай Н. В., Калініченко М. М. Числові системи : навчальний посібник. Видання друге, перероблене, виправлене й доповнене. Глухів, 2024. 123 с. С. 108-113, 38-39
3. Лиман Ф. М. Числові системи. Навчальний посібник Суми : Видавництво "МакДен", 2010. 192 с.

Основні теоретичні факти

Поняття кватерніона
Розглянемо над полем дійсних чисел кільце (операції додавання й множення), базисом якого є лінійно незалежні елементи $1, i, j, k$, множення яких відбувається за такими правилами: $$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,\ ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j.$$ Тоді кожен елемент кільця можна записати у вигляді $$q = a + bi + cj + dk,\ a, b, c, d \in R.$$ Елемент такого вигляду називають *кватерніоном*.
Алгебра кватерніонів
Кільце, яке описане вище, називають *алгеброю кватерніонів*. Ця алгебра має ранг чотири над полем дійсних чисел, лінійно незалежні елементи $1, i, j, k$ утворюють базис цієї алгебри Зазвичай алгебру кватерніонів *позначають* $\mathbb{H}$ (або просто H).
Операції над кватерніонами
Додавання кватерніонів відбувається поелементно, є комутативним і асоціативним, множення (доцільно множити як многочлени з врахуванням формул $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$) є асоціативним і НЕ є комутативним. Тому лінійна алгебра кватерніонів над полем дійсних чисел є тілом, але не є полем.
Норма і модуль кватерніона
$q = a + bi + cj + dk$. Тоді *норма* кватерніона $\lVert q \rVert = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, *модуль* кватерніона $\lvert q \rvert = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$. Кватерніон, *спряжений* до заданого: $\overline{q} = a - bi - cj - dk$. Кватерніон, обернений до заданого: $q^{-1} = \dfrac{\overline{q}}{\lVert q \rVert}$.

Якщо $q \neq 0$, то має місце формула $\boxed{q \cdot \frac{\bar{q}}{\|q\|} = 1}$

Навчальні завдання

✍№ 1. Для заданих кватерніонів знайдіть норму, модуль, спряжений кватерніон: а) $q = 5 - i + 3j + k$; б) $q = -6j + 2k$.

○ а) Оскільки $q = 5 - i + 3j + k$, то норма кватерніона $\|q\| = 5^2 + (-1)^2 + 3^2 + 1^2 = 25 + 1 + 9 + 1 = 36$, а його модуль $|q| = \sqrt{\|q\|} = \sqrt{36} = 6$. Спряжений кватерніон $\bar{q} = 5 + i - 3j - k$;

б) $q = -6j + 2k$. Тоді $\|q\| = 0^2 + 0^2 + (-6)^2 + 2^2 = 40$, $|q| = \sqrt{\|q\|} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$. Спряжений кватерніон $\bar{q} = 6j - 2k$.

✍№ 2. Нехай $q_1 = -3 + 2i + j - 4k$, $q_2 = 2 - i + 4j - k$. Обчисліть $2q_1 - 3q_2$.

○ $2q_1 - 3q_2 = 2 \cdot \left(-3 + 2i + j - 4k\right) - 3 \cdot \left(2 - i + 4j - k\right) = -6 + 4i + 2j - 8k -$ $-6 + 3i - 12j + 3k = -12 + 7i - 10j - 5k$.

✍№ 3. Обчисліть добуток кватерніонів $q_1 = -3 + 2i + j - 4k$ і $q_2 = 2 - i + 4j - k$.

○ Оскільки добуток кватерніонів не є комутативним, то необхідно обчислювати два добутки: $q_1 \cdot q_2$ і $q_2 \cdot q_1$. Множити будемо як многочлени.

$q_1 \cdot q_2 = \left(-3 + 2i + j - 4k\right) \cdot \left(2 - i + 4j - k\right) = -6 + 3i - 12j + 3k + 4i - 2i^2 + 8ij -$ $-2ik + 2j - ji + 4j^2 - jk - 8k + 4ki - 16kj + 4k^2$. Врахуємо правила множення базисних елементів. Тоді $q_1 \cdot q_2 = -6 + 3i - 12j + 3k + 4i - 2 \cdot (-1) + 8k - 2(-j) +$ $+2j - (-k) + 4 \cdot (-1) - i - 8k + 4j - 16(-i) + 4 \cdot (-1) = -12 + 22i - 4j + 4k$. Отже, $q_1 \cdot q_2 = -12 + 22i - 4j + 4k$.

$q_2 \cdot q_1 = \left(2 - i + 4j - k\right) \cdot \left(-3 + 2i + j - 4k\right) = -6 + 4i + 2j - 8k + 3i - 2i^2 - ij +$ $+4ik - 12j + 8ji + 4j^2 - 16jk + 3k - 2ki - kj + 4k^2 = -6 + 4i + 2j - 8k + 3i + 2 - k +$ $+4(-j) - 12j + 8(-k) - 4 - 16i + 3k - 2j + i - 4 = -12 - 8i - 20j + 4k$.

Отже, $q_2 \cdot q_1 = -12 - 8i - 20j + 4k$.

✍№ 4. Розв'яжіть рівняння: а) $5 - i + 3j + k + q = 3 - i + j - k, q \in H$; б) $\left(5 - i + 3j + k\right) \cdot q = 3 - i + j - k, q \in H$; в) $q \cdot \left(5 - i + 3j + k\right) = 3 - i + j - k, q \in H$.

○ а) $5-i+3j+k+q=3-i+j-k \Rightarrow q=(3-i+j-k)-(5-i+3j+k)$, тобто $q=-2-2j-2k$.

б) Для розв'язування рівняння $(5-i+3j+k)\cdot q=3-i+j-k, q\in H$ помножимо обидві частини рівняння *зліва* на кватерніон, обернений до $q_1=5-i+3j+k$. Такий кватерніон має вигляд $q_1^{-1}=\dfrac{\bar{q}_1}{\|q_1\|}$. Обчислимо його.

$\bar{q}_1=5+i-3j-k, \|\bar{q}_1\|=25+1+9+1=36, q_1^{-1}=\dfrac{1}{36}\cdot(5+i-3j-k)$. Оскільки $q_1^{-1}\cdot q_1=1$, то $q=\dfrac{1}{36}\cdot(5+i-3j-k)\cdot(3-i+j-k)$, тобто $q=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{18}i-\dfrac{1}{18}j-\dfrac{5}{18}k$;

в) Для розв'язання рівняння $q\cdot(5-i+3j+k)=3-i+j-k, q\in H$ помножимо обидві частини рівняння *справа* на кватерніон, обернений до $q_1=5-i+3j+k$. З попереднього прикладу $q_1^{-1}=\dfrac{1}{36}\cdot(5+i-3j-k)$. Тоді $q=(3-i+j-k)\cdot\dfrac{1}{36}\cdot(5+i-3j-k)$, тобто $q=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}i-\dfrac{1}{6}j-\dfrac{1}{6}k$.

Завдання для аудиторної роботи

✍ № 1. Для заданих кватерніонів знайдіть норму, модуль, спряжений кватерніон, обернений кватерніон: а) $q=-3+2i-j+6k$; б) $q=4-6i+2k$. Переконайтеся, що для заданих кватерніонів виконується формула $q\cdot\dfrac{\bar{q}}{\|q\|}=1$.

✍ № 2. Нехай $q_1=-3i+j-k$, $q_2=3-2i+j-6k$. Обчисліть: а) $2q_1+3q_2$; б) $2q_1\cdot q_2$; в) $q_2\cdot q_1$.

✍ № 3. Розв'яжіть рівняння: а) $-5i+6j-k+q=8j-k, q\in H$; б) $4-5i+6j+3k-q=3-8j-k, q\in H$; в) $(5+5i+3j)\cdot q=3+3i+j-4k, q\in H$; г) $q\cdot(i+3j+2k)=3-i+j-k, q\in H$. Зробіть перевірку.

✍ № 4. Знайдіть такий кватерніон, щоб його добуток з заданим кватерніоном q_1 дорівнював кватерніону q_2. Чи існує такий кватерніон? Чи єдиний він?

Завдання для самостійної роботи

✍ № 1. Для заданих кватерніонів знайдіть норму, модуль, спряжений кватерніон, обернений кватерніон: а) $q=-2i+5j+6k$; б) $q=3+2i-j+k$. Переконайтеся, що для заданих кватерніонів виконується формула $q\cdot\frac{\overline{q}}{\|q\|}=1$.

✍ № 2. Нехай $q_1=5-i+3j-2k$, $q_2=3i+2j-7k$. Обчисліть: а) $-q_1+2q_2$; б) $2q_1\cdot q_2$; в) $q_2\cdot q_1$.

✍ № 3. Розв'яжіть рівняння:

а) $2+5i+j-k+q=8+j-k, q\in H$;

б) $3-5i+6j+k-2q=3-8j-k, q\in H$;

в) $(5+5i+3j-k)\cdot q=7+3i+j-4k, q\in H$;

г) $q\cdot(3+i+3j)=3-i+j-7k, q\in H$. Зробіть перевірку.

✍ № 4. Знайдіть такий кватерніон, щоб його сума (різниця) з заданим кватерніоном q_1 дорівнювала кватерніону q_2. Чи існує такий кватерніон? Чи єдиний він?

Додаткові завдання

✍ № 1. Доведіть, що є такий кватерніон $x=x_1+x_2i+x_3j+x_4k$, що $\alpha x=\beta, \alpha\neq 0$.

✍ № 2. Відомо, що в системі комплексних чисел дві одиниці (одна дійсна, а друга уявна), а в системі кватерніонів чотири одиниці. Чому не розглядаються системи з трьома одиницями 1, *i*, *k*? Чи можна розглянути системи з трьома уявними одиницями *i, j, k*?

✍ № 3. *Проєкт.* Заповніть таблицю 4.3.1 для алгебри кватерніонів. Чи єдиним чином можна зобразити кватерніон? Чи однозначно визначається сума, різниця, добуток, частка двох кватерніонів? Відповідь обґрунтуйте.

Таблиця 4.3.1

Операція	Чи є означення	Властивості	Чи є алгебр	Компоненти	Результат
Додавання					
Множення					
Віднімання					
Ділення					

Відповіді: *Завдання для аудиторної роботи.* **№1.** а) $\|q\|=50, |q|=5\sqrt{2}$, $\overline{q}=-3-2i+j-6k$, $q^{-1}=-\frac{3}{50}-\frac{1}{25}i+\frac{1}{50}j-\frac{3}{25}k$. **№2.** б) $-34-4i-6j-92k$. **№3.** а) $5i+2j$; в) $\frac{19}{20}-\frac{3}{20}i-\frac{11}{20}j-\frac{3}{20}k$. *Завдання для самостійної роботи.* **№1.** б) $\|q\|=15, |q|=\sqrt{15}$,

$\bar{q} = 3 - 2i + j - k, \quad q^{-1} = \frac{1}{5} - \frac{2}{15}i + \frac{1}{15}j - \frac{1}{15}k$. **№2.** в) $-17 + 32i + 23j - 24k$. **№3.** б) $-2.5i + 7j + k$; г) $\frac{11}{19} - \frac{27}{19}i + \frac{1}{19}j - \frac{17}{19}k$.

Самостійна робота № 4 за ЗМ «Множина дійсних чисел. Множина комплексних чисел»

➢ **Завдання 1** (для всіх здобувачів). Зобразіть множини натуральних, цілих, раціональних, ірраціональних, дійсних, комплексних чисел за допомогою кругів Ейлера. Наведіть приклади чисел і позначте їх на побудованій діаграмі, якщо: а) число ірраціональне; б) число раціональне; в) число раціональне, але не є комплексним; г) число комплексне, але не є дійсним.

➢ **Завдання 2** (для всіх здобувачів). Наведіть приклад квадратного рівняння, яке: а) має розв'язок у множині дійсних чисел, але не має розв'язку у множині раціональних чисел; б) має розв'язок у множині раціональних чисел, але не має розв'язку у множині ірраціональних чисел; в) не має розв'язку у множині дійсних чисел, але має розв'язок у множині комплексних чисел. Розв'яжіть наведені вами рівняння.

➢ **Завдання 3.** Доведіть, що пропоноване число є ірраціональним і запишіть його у вигляді ланцюгового дробу:

1. $\sqrt{2}-1$;	2. $\sqrt{3}-1$;	3. $\sqrt{5}-2$;	4. $\sqrt{5}-1$
5. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$;	6. $\sqrt{6}-1$;	7. $\sqrt{6}-2$;	8. $\frac{\sqrt{6}-2}{2}$;
9. $\sqrt{7}-1$;	10. $\frac{\sqrt{7}-1}{2}$;	11. $\sqrt{7}-2$;	12. $\frac{\sqrt{7}-1}{3}$;
13. $\sqrt{11}-1$;	14. $\frac{\sqrt{11}-1}{2}$;	15. $\frac{\sqrt{11}-1}{3}$;	16. $\sqrt{11}$;
17. $\sqrt{13}$;	18. $\sqrt{13}-2$;	19. $\sqrt{13}-3$;	20. $\frac{\sqrt{13}-3}{2}$.

Завдання 4. Охарактеризуйте і зобразіть на комплексній площині множину точок, які задовольняють умови:

1. $2<|z+3|<3,\ \frac{\pi}{3}<\arg z<\frac{5\pi}{3}$;

2. $|z|<4,\ 0<\arg z\le\frac{\pi}{2}$;

3. $|z-1|\ge 2,\ \mathrm{Im}(z-1)>0$;

4. $|z|\le 4,\ \frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{5\pi}{4}$;

5. $1<|z-1-i|<4,\ \frac{\pi}{6}<\arg z<\frac{\pi}{2}$;

6. $|z|=\mathrm{Re}\,z+1$;

7. $|z|=\mathrm{Im}\,z+2$;

8. $z=2e^{i\varphi},\ 0\le\varphi\le\pi$;

9. $|z-1+i|=|z+5+i|$;

10. $z=2+3i+4e^{i\varphi},\ \frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{3\pi}{2}$;

11. $\mathrm{Im}\,z^2=2,\ \mathrm{Re}\,z\ge 0$;

12. $|z|\le 4,\ 0<\mathrm{Re}(iz)\le 1$;

13. $|z|\le 4,\ 0<\mathrm{Im}(iz)\le 1$;

14. $2\le|z+3|\le 3,\ \frac{\pi}{3}<\arg(iz)<\frac{5\pi}{3}$;

15. $\mathrm{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)=0$;

16. $\mathrm{Re}\,z+\mathrm{Im}\,z<1,\ \left|z-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right|\le 1$;

17. $\left|\frac{z+1}{z-1}\right|\le 1$;

18. $|z|\ge 4,\ \frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$;

19. $|z-1|=\mathrm{Re}\,z+1$;

20. $z=4e^{i\varphi},\ \frac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ Й ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Безущак, О. О., Ганюшкін О. Г. Математична логіка: навч. посіб. К. : ВПЦ "Київський університет". 2023. 143 с.
2. Вивальнюк Л. М., Григоренко В. К., Левіщенко С. С. Числові системи. К. : Вища школа, 1988. 272 с.
3. Кугай Н. В. Методологічні знання майбутнього вчителя математики : монографія. Харків: ФОП Панов А. М., 2017. 336 с.
4. Кугай Н. В. Числові системи : навчально-методичний посібник. Глухів : РВВ ГНПУ ім. О. Довженка. 2011. 84 с.
5. Кугай Н. В., Борисов Є. М., Дем'яненко Ю. Ю. Що повинен знати вчитель математики про натуральні числа. Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки. Черкаси, 2014. Випуск 8 (301). С. 62-66.
6. Кугай Н.В., Калініченко М.М. Підготовка майбутніх учителів математики: методологічний аспект : монографія. Харків, 2020. 522 с.
7. Кугай Н. В., Борисов Є. М., Шелудько В. І. Основи комплексного аналізу (практикум) : навчально-методичний посібник. Харків : ФОП Панов А. М., 2017. 120 с.
8. Кугай Н. В., Калініченко М. М. Числові системи : навчальний посібник. Видання друге, перероблене, виправлене й доповнене. Глухів, 2024. 123 с.
9. Лиман Ф. М. Математична логіка і теорія алгоритмів. Навчальний посібник. Суми: Видавництво «Слобожанщина», 1998. 152 с
10. Лиман Ф. М. Числові системи. Навчальний посібник Суми : Видавництво "МакДен", 2010. 192 с.
11. Попов М. М. Математична логіка: конспект лекцій для студентів механіко-математичного факультету. К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2015. 79 с.
12. Роїк О.М., Тадевосян Р.Г. Основи дискретної математики. Ч l. Метод математичної індукції, обчислення висловлень, теорія множин. Навчальний посібник. Вінниця: ВДТУ 2002. 111 с.
13. Числові системи : навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів / укл. М. О. Медведева, І. М. Білятинська. Умань : Візаві, 2015. 130 с.
14. Шкіль М. І. Математичний аналіз : Підручник : У 2 ч. Київ : Вища школа, 2005. Ч. 1. 447 с.
15. Навчальні програми з математики. Електронний ресурс. https://mon.gov.ua/.

Електронне видання

КУГАЙ Наталія

КАЛІНІЧЕНКО Микола

ЧИСЛОВІ СИСТЕМИ

(практикум)

Навчально-методичний посібник

Підп. до розповсюдження 24.09.2025.
Формат 60x84/8. Умов. друк. арк. 9,3. Зам. 3531
Облік.-вид. арк. 2,94. Папір офсетний. Гарнітура Таймс.
Видавництво Глухівського національного педагогічного
університету імені Олександра Довженка.
41400, м. Глухів, Сумська обл., вул. Київська, 24,
тел/факс (05444) 2-33-06.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК No678 від 19.11.2001.