Наталія КУГАЙ

Микола КАЛІНІЧЕНКО

ЧИСЛОВІ СИСТЕМИ

Міністерство освіти і науки України

Глухівський національний педагогічний університет
імені Олександра Довженка

Наталія КУГАЙ
Микола КАЛІНІЧЕНКО

ЧИСЛОВІ СИСТЕМИ

Навчальний посібник

Глухів-2024

УДК 511.11(075.8)
К 88

Рекомендовано до друку вченою радою
Глухівського національного педагогічного університету імені
Олександра Довженка
(протокол N 2 від 25 вересня 2024 р.)

Рецензенти:
ГОДОВАНЮК Тетяна – доктор педагогічних наук, професор, проректор з наукової роботи, професор кафедри вищої математики та методики навчання математики Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини
БУРЧАК Станіслав – доктор педагогічних наук, професор, декан факультету технологічної і професійної освіти Глухівського національного педагогічного університету імені Олександра Довженка

К 88
КУГАЙ Н. В., КАЛІНІЧЕНКО М. М. Числові системи : навчальний посібник. Видання друге, перероблене, виправлене й доповнене. Глухів, 2024. 123 с.

У навчальному посібнику розглянуто теоретичний матеріал навчальної дисципліни «Числові системи». Матеріал структурований за змістовими модулями і темами у кожному змістовому модулі. Теоретичний матеріал супроводжується прикладами для кращого розуміння здобувачами абстрактних понять і фактів. У Додатку А наведено методологічні знання з навчальної дисципліни «Числові системи».

Для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «Бакалавр» освітньо-професійних програм «Середня освіта (Математика та інформатика)», «Середня освіта (Інформатика)».

УДК 511.11(075.8)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА 6

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ 8

Тема 1.1. Елементи теорії множин і математичної логіки 8

Тема 1.2. Відношення у множині 22

Тема 1.3. Алгебраїчні структури. Упорядковані алгебраїчні структури 32

Тема 1.4. Абсолютна величина елемента лінійно і строго упорядкованого кільця. Критерії 45

Запитання до колоквіуму 48

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2. МНОЖИНА НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ 49

Тема 2.1. Означення системи натуральних чисел 49

Тема 2.2. Додавання і множення натуральних чисел 55

Тема 2.3. Відношення порядку на множині натуральних чисел 61

Тема 2.4. Віднімання і ділення натуральних чисел 66

Тема 2.5. Характеристика системи аксіом Пеано 74

Запитання до колоквіуму 78

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3. МНОЖИНА ЦІЛИХ ЧИСЕЛ. МНОЖИНА РАЦІОНАЛЬНИХ ЧИСЕЛ 79

Тема 3.1. Множина цілих чисел 79

Тема 3.2. Множина раціональних чисел 86

Запитання до колоквіуму 93

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 4. МНОЖИНА ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ. МНОЖИНА КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ 94

Тема 4.1. Множина дійсних чисел 94

Тема 4.2. Множина комплексних чисел 105

Тема 4.3. Подальші розширення числових множин **109**
Запитання до колоквіуму **115**

ДОДАТОК А. Методологічні знання майбутнього вчителя математики з навчальної дисципліни «Числові системи» **116**

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ Й ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ **123**

ПЕРЕДМОВА

Навчальна дисципліна «Числові системи» має пряме відношення до питань логічного обґрунтування математики, а тому відіграє особливу роль у процесі формування методологічних знань і фахового становлення не тільки майбутніх учителів, але й викладачів математики різних закладів освіти.

Навчальний посібник «Числові системи» призначений для здобувачів освіти, викладачів та всіх, хто цікавиться математикою та її фундаментальними основами. Числові системи – це одна з базових тем у математиці, яка лежить в основі багатьох складніших концепцій та теорій. Від розуміння натуральних чисел до засвоєння абстрактних алгебраїчних структур, числові системи відіграють ключову роль у математичному мисленні.

У цьому посібнику розглянуто різноманітні числові системи, починаючи від знайомих натуральних, цілих, раціональних, ірраціональних та комплексних чисел, і закінчуючи більш складними системами, такими як кватерніони.

Теоретичний матеріал структурований за чотирма змістовими модулями. Кожен змістовий модуль розбито на теми, а теми – на окремі питання. Після кожної теми пропонуються запитання і завдання для самоконтролю.

Метою цього посібника є не лише ознайомлення з різноманітністю числових систем, але й розвиток глибокого розуміння того, як ці системи взаємодіють між собою. Особливий акцент зроблено на взаємозв'язку навчальної дисципліни «Числові системи» та шкільного курсу математики.

Порівняно з першим виданням тут виправлено друкарські неточності, у першому змістовому модулі наводиться теоретичний матеріал інших розділів математики, необхідний для розуміння числових систем. Теоретичний матеріал супроводжується прикладами для кращого розуміння здобувачами абстрактних понять і фактів. У Додатку А наведено методологічні знання з навчальної дисципліни «Числові системи».

Сподіваємося, що цей посібник стане надійним супутником для тих, хто бажає поглибити свої знання в галузі математики, та сприятиме розвитку вашого інтересу до цього захоплюючого предмета.

З найкращими побажаннями, Автори

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1.
ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

Тема 1.1. Елементи теорії множин і математичної логіки

1. **Поняття множини. Способи задання множин**
2. **Рівність множин. Включення множин**
3. **Операції над множинами**
4. **Декартів добуток множин**
5. **Висловлення. Операції над висловленнями**
6. **Предикати. Операції над предикатами. Квантори**

1. Поняття множини. Способи задання множин

Нагадаємо ті фундаментальні факти (означення, теореми тощо), які вже відомі здобувачам освіти з курсів вищої математики і які мають важливе значення для вивчення навчальної дисципліни «Числові системи».

Множина – поняття неозначуване. Синоніми – сукупність, набір тощо. Об'єкти, з яких складається множина, називають її елементами. Як правило, множини позначають великими літерами латинського алфавіту, а елементи – малими.

Використовують такі *позначення*: $a \in A$ – елемент a належить множині A; $a \notin A$ – елемент a не належить множині A.

Геометрично множину можна зобразити за допомогою круга Ейлера (рис. 1.1).

Як правило, розглядають два способи задання множин:

а) переліком елементів. Наприклад, $A = \{0; 2; 4; 6; 8\}$;

б) за допомогою характеристичної властивості. Наприклад, $A = \{x \in R \mid x < 1\}$.

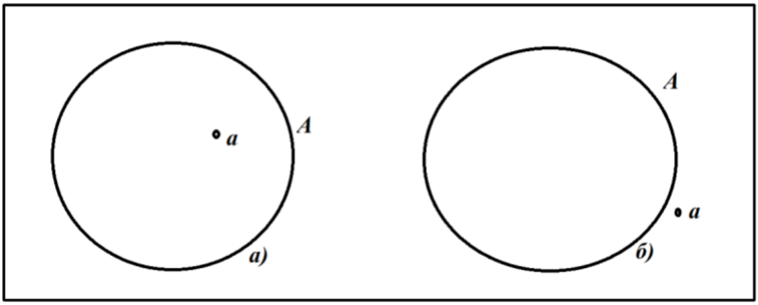


Рис. 1.1. Елемент належить множині (а)), елемент не належить множині (б))

✍ <u>Приклад 1.1.</u> Запишіть множину $A = \{0; 2; 4; 6; 8\}$ за допомогою характеристичної властивості.

○ Задану множину можна розглянути як множину парних цифр десяткової системи числення. Тоді $A = \{x \mid x - \text{парна цифра десяткової системи числення}\}$.

2. Рівність множин. Включення множин

<u>Означення 1.1.</u> Множини називаються рівними, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів.

Наприклад, множини $B = \{x \in R \mid (x-4)(x-6)(x-8) = 0\}$ і $A = \{4; 6; 8\}$ рівні.

Позначення: $A = B$.

З означення 1.1 маємо, що:

а) порядок розміщення елементів у записі множини не відіграє ролі. Так, $\{4; 6; 8\}$ і $\{4; 8; 6\}$ – рівні множини;

б) рівні елементи записують у множині лише один раз. Так, множина розв’язків рівняння $(x-1)^2 = 0$ має вигляд $\{1\}$.

<u>Означення 1.2.</u> Множина A називається підмножиною множини B, якщо всі елементи множини A належать множині B.

Позначення: $A \subset B$, за допомогою кругів Ейлера – рис. 1.2.

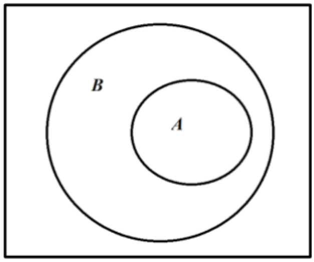


Рис. 1.2. Включення множин

Нагадаємо, що множину всіх підмножин множини A називають *булеаном* цієї множини. Як правило, *позначають* $P(A)$. Якщо множина A містить n елементів (*позначають*: $n(A)$ = n), то її булеан містить 2^n елементів, $n(P(A)) = 2^n$.

Теорема 1.1. Множини A та B рівні тоді і тільки тоді, коли $A \subset B$ і $B \subset A$.

3. Операції над множинами

Означення 1.2. Об'єднанням множин A та B називається така множина C, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать хоча б одній із множин.

Позначення: $A \cup B$, за допомогою кругів Ейлера – рис. 1.3 (позначено жовтим кольором).

Формалізовано: $C = A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}$.

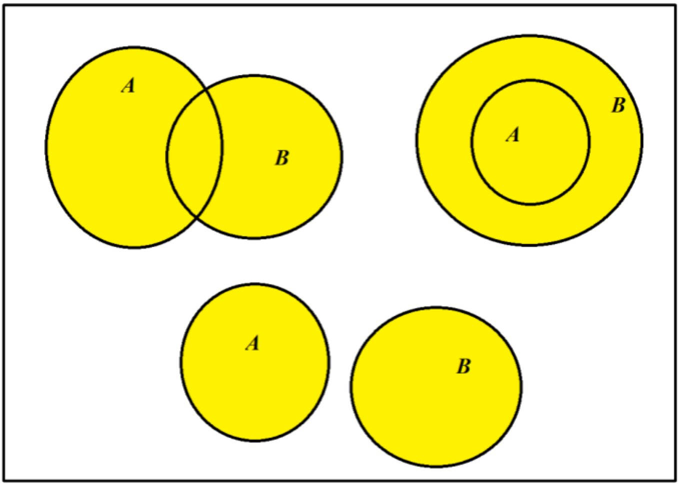


Рис. 1.3. Об’єднання множин

<u>*Означення 1.3.*</u> Перетином множин A та B називається така множина C, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать обом множинам.

Позначення: $A \cap B$, за допомогою кругів Ейлера – рис. 1.4 (позначено бузковим кольором).

Формалізовано: $C = A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}$.

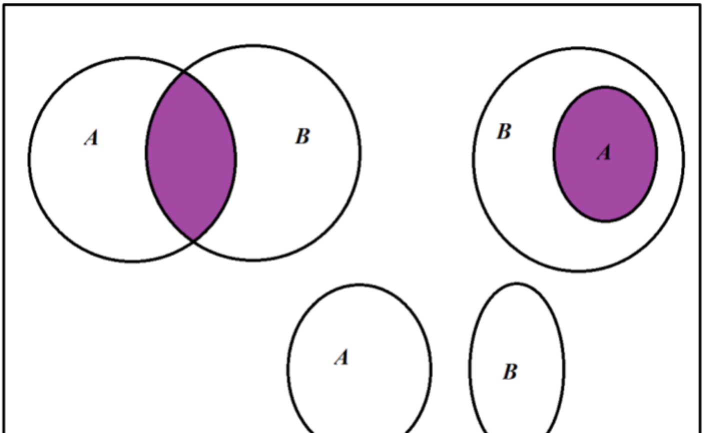


Рис. 1.4. Перетин множин

Означення 1.4. Різницею множин *A* та *B* називається така множина *C*, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать множині *A* і не належать множині *B*.

Позначення: $A \setminus B$, за допомогою кругів Ейлера – рис. 1.5 (позначено помаранчевим кольором).

Формалізовано: $C = A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \notin B\}$.

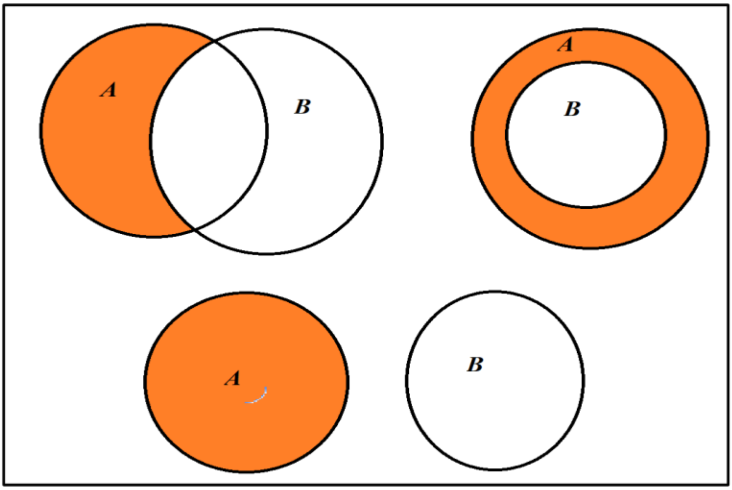


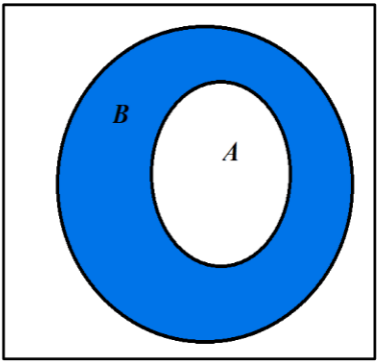
Рис. 1.4. Різниця множин *A* та *B*

Означення 1.5. Якщо множина *A* є підмножиною *B*, то різницю множин *B* та *A* називають доповненням множини *A* до множини *B*.

Позначення: $\overline{A_B}$, за допомогою кругів Ейлера – рис. 1.6 (позначено блаватним кольором).

Якщо множину *B* розглядати як універсальну, то у цьому випадку різницю множин *B* та *A* називають доповненням множини *A*.

Позначення: $\overline{A}$, за допомогою кругів Ейлера – рис. 1.7 (позначено блакитним кольором).



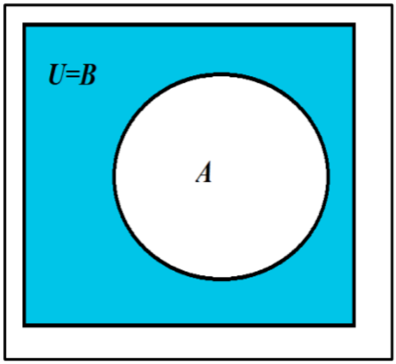


Рис. 1.6. Доповнення множини *A* до множини *B*

Рис. 1.7. Доповнення множини *A*

Якщо множини, над якими виконуємо операції, є числовими, то самі вони і результати операцій над ними можуть бути зображені на координатній прямій.

✍ <u>Приклад 1.2</u>. Зобразіть на координатній прямій множини *A, B*, їхнє об'єднання, перетин, різницю $A \setminus B$ і $B \setminus A$, якщо

$$A = \left\{ x \mid x \in R \text{ і } x^2(x^2 + 2x - 3) \ge 0 \right\},$$

$$B = \left\{ x \mid x \in R \text{ і } x(x^2 - 4x - 5)^2 \le 0 \right\}.$$

○ Множини *A* та *B* задані за допомогою характеристичної властивості, яка представлена як відповідна нерівність. Розв'яжемо кожну з них.

а) $x^2(x^2 + 2x - 3) \ge 0$. Застосуємо метод інтервалів. Функція $f(x) = x^2(x^2 + 2x - 3)$ неперервна на R і має нулі $x = 0, x = -3, x = 1$. Зобразимо їх на координатній прямій і визначимо знак функції $f(x) = x^2(x^2 + 2x - 3)$ на кожному з утворених проміжків. Множина *A* зображена на рис. 1.8 зеленим кольором.

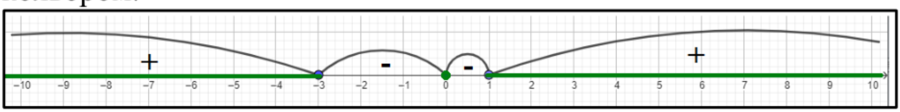


Рис.1.8. Множина $A = (-\infty; -3] \cup [1; +\infty) \cup \{0\}$

б) Аналогічно розв’яжемо нерівність $x(x^2-4x-5)^2 \le 0$. Функція $g(x)=x(x^2-4x-5)^2$ неперервна на R і має нулі $x=0, x=-1, x=5$. Зобразимо їх на координатній прямій і визначимо знак функції $g(x)=x(x^2-4x-5)^2$ на кожному з утворених проміжків. Множина B зображена на рис. 1.9 кубовим кольором.

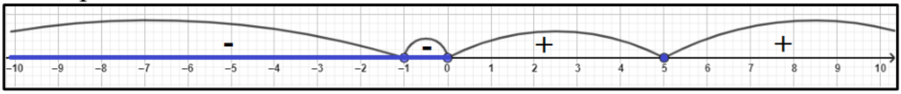


Рис.1.9. Множина $B=\left(-\infty;0\right]\cup\left\{5\right\}$

Порівнюючи множини на рис. 1.8 і рис. 1.9, знаходимо об’єднання множин $A\cup B=\left(-\infty;-1\right]\cup\left[1;+\infty\right)$ (рис. 1.10 а)), перетин $A\cap B=\left(-\infty;-3\right]\cup\left\{0;5\right\}$ (рис. 1.10 б)), різниці $A\setminus B=\left[1;5\right)\cup\left(5;+\infty\right)$ (рис. 1.10 в)) і $B\setminus A=\left(-3;0\right)$ (рис.1.10 г)).

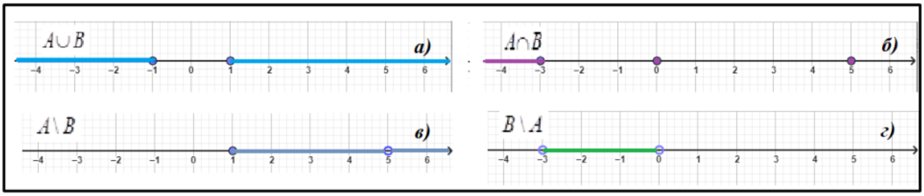


Рис. 1.10. Об’єднання, перетин і різниці множин

Нагадаємо, що операції об’єднання й перетину можна поширити на довільну кількість множин (скінченну чи нескінченну).

Позначення: $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k, \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ – об’єднання й перетин скінченної кількості множин відповідно;

$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k, \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ – об’єднання й перетин зчисленної кількості множин відповідно.

4. Декартів добуток множин

<u>Означення 1.5.</u> Декартовим добутком множин A та B називається множина всіх упорядкованих пар, перша компонента яких належить множині A, а друга – множині B.

Позначення: $A \times B$.

Формалізовано: $C = A \times B = \{(a;b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Якщо $A = B$, то $A \times A = A^2$ називають декартів квадрат множини A, $A \times A \times A = A^3$ – декартів куб множини і так далі.

Якщо множини A та B числові, то декартів добуток $A \times B$ можна зобразити на координатній площині.

✍ <u>Приклад 1.2</u>. Зобразіть на координатній площині декартів добуток $A \times B$ та $B \times A$, якщо $A = \left\{ x \mid x \in N \text{ і } 2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 32 = 0 \right\}$, $B = \left\{ y \mid y \in R \text{ і } \log_3 y > 1 \right\}$.

○ Обидві множини задані за допомогою характеристичної властивості, яка для множини A задана показниковим рівнянням, а для множини B – логарифмічною нерівністю. Розв'яжемо їх.

$2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$. Нехай $t = 2^x, t > 0$, тоді $t^2 = 2^{2x}$. Маємо: $t^2 - 12t + 32 = 0$, тоді $t_1 = 8, t_2 = 4$. Враховуючи заміну, одержимо: $2^x = 8$ або $2^x = 4$. Тоді $x = 3$ або $x = 2$. Обидва числа натуральні, тому множину можна задати переліком елементів: $A = \{2;3\}$.

$\log_3 y > 1$. Перепишемо нерівність: $\log_3 y > \log_3 3$. Враховуючи, що основа логарифма більша, ніж 1, маємо систему $\begin{cases} y > 3, \\ y > 0 \end{cases}$, розв'язком якої є $y > 3$. Отже, множина $B = (3; +\infty)$.

Тоді $A \times B = \{(x,y) \mid x = 2 \text{ або } x = 3 \text{ і } y > 3\}$ (рис. 1.11 а)), $B \times A = \{(x,y) \mid x > 3 \text{ і } y = 2 \text{ або } y = 3 \}$ (рис. 1.11 б)).

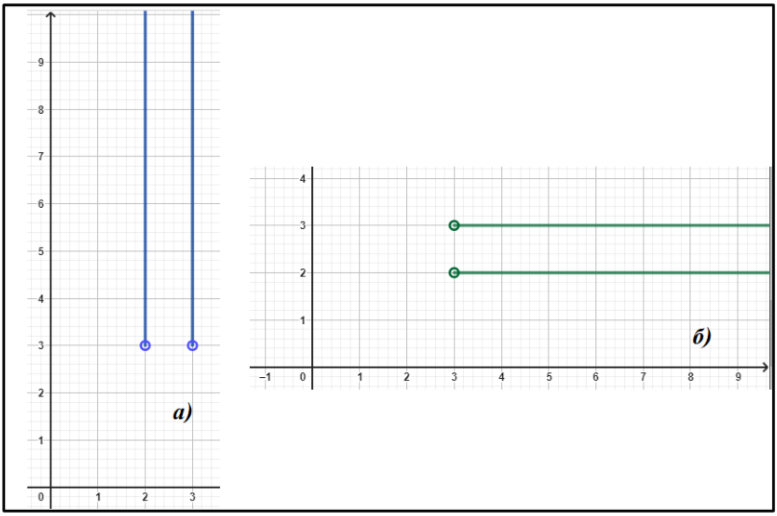


Рис. 1.11. Декартів добуток множин

5. Висловлення. Операції над висловленнями

Висловлення – основне, неозначуване поняття алгебри висловлень. Під висловленням розуміють таке розповідне речення, про яке можна говорити, що воно істинне або хибне.

Позначати висловлення будемо позначати великими літерами A, B, C тощо.

Операції, які будемо розглядати над висловленнями, - заперечення, диз'юнкція, кон'юнкція, імплікація, еквіваленція. Нагадаємо відповідні означення.

Означення 1.6. Запереченням висловлення A називається висловлення $\overline{A}$ (читається: не A), яке є істинним тоді й тільки тоді, коли висловлення A є хибним.

Позначення: $\overline{A}$.

Таблиця істинності:

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

<u>Означення 1.7.</u> Диз'юнкцією двох висловлень A та B називається таке висловлення, яке є хибним тоді й тільки тоді, коли обидва висловлення A та B хибні.

Позначення: $A \vee B$ (читається: A *або* B).

Таблиця істинності:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
1	1	1
0	1	1
1	0	1

<u>Означення 1.8.</u> Кон'юнкцією двох висловлень A та B називається таке висловлення, яке є істинним тоді й тільки тоді, коли обидва висловлення A та B істинні.

Позначення: $A \wedge B$ (читається: A *і* B).

Таблиця істинності:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
1	1	1
0	1	0
1	0	0

<u>Означення 1.9.</u> Імплікацією двох висловлень A та B називається таке висловлення, яке є хибним тоді й тільки тоді, коли висловлення A істинне, а висловлення B – хибне.

Позначення: $A \Rightarrow B$ (читається: *якщо* A, *то* B).

Таблиця істинності:

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
1	1	1
0	1	1
1	0	0

Нагадаємо, якщо імплікація $A \Rightarrow B$ істинна, то умова B є необхідною умовою для A, а умова A є достатньою для B.

<u>Означення 1.10.</u> Еквіваленцією двох висловлень A та B називається таке висловлення, яке є істинним тоді й тільки тоді, коли висловлення A та B набувають однакових значень істинності.

Позначення: $A \Leftrightarrow B$ (читається: *A тоді й тільки тоді, коли B; необхідно й достатньо*).

Таблиця істинності:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
1	1	1
0	1	0
1	0	0

6. Предикати. Операції над предикатами. Квантори

Нехай $A \subset A_1 \times A_2 \times \ldots A_n$.

<u>Означення 1.11.</u> n-місним предикатом, заданим на множині A, називається речення, яке містить n змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ і яке перетворюється у висловлення, якщо замість цих змінних підставити конкретні їхні значення $(a_1, a_2, ..., a_n) \in A$.

Іншими словами, предикат – це відображення множини A у множину $\{0;1\}$.

Позначення: $P(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Над предикатами, як і над висловленнями, можна виконувати такі операції: заперечення, диз'юнкція, кон'юнкція, імплікація, еквіваленція. Означення цих операцій аналогічне до означення відповідних операцій над висловленнями. Наведемо одне з них, а решту пропонуємо читачам сформулювати (нагадати) самостійно.

<u>Означення 1.12.</u> Диз'юнкцією двох предикатів $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ та $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$, визначених на множині A, називається такий предикат, який перетворюється в хибне висловлення для всіх тих і тільки тих значень змінних, для яких перетворюються в хибні висловлення обидва задані предикати.

Позначення: $P(x_1, x_2, ..., x_n) \vee Q(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Область істинності диз'юнкції двох предикатів дорівнює об'єднанню областей істинності кожного з предикатів $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ та $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Над предикатами виконують ще одну логічну операцію – *квантифікування* предикатів. Розрізняють два квантори – *квантор загальності* і *квантор існування.*

Означення 1.13. Зв'язування квантором загальності за змінною x_i називається логічна операція, яка кожному *n*-місному предикату $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданому на множині $A \subset A_1 \times A_2 \times \ldots A_n$, ставить у відповідність $(n-1)$-місний предикат, який перетворюється в істинне висловлення при підстановці замість x_k будь-яких конкретних значень $a_k \in A_k$ ($k \neq i, 1 \leq k \leq n$) тоді і тільки тоді, коли одномісний предикат $P(a_1, a_2, ..., x_i, ..., a_n)$ тотожно істинний на множині A_i.

Позначення: $\forall x_i \, P(x_1, x_2, ..., x_n)$ (читається: для будь-якого «ікс ітого» має місце $P(x_1, x_2, ..., x_n)$; для всіх «ікс ітих» має місце $P(x_1, x_2, ..., x_n)$).

Означення 1.14. Зв'язування квантором існування за змінною x_i називається логічна операція, яка кожному *n*-місному предикату $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданому на множині $A \subset A_1 \times A_2 \times \ldots A_n$, ставить у відповідність $(n-1)$-місний предикат, який перетворюється в хибне висловлення при підстановці замість x_k будь-яких конкретних значень $a_k \in A_k$ ($k \neq i, 1 \leq k \leq n$) тоді і тільки тоді, коли одномісний предикат $P(a_1, a_2, ..., x_i, ..., a_n)$ тотожно хибний на множині A_i.

Позначення: $\exists x_i \, P(x_1, x_2, ..., x_n)$ (читається: існує такий «ікс ітий», що має місце $P(x_1, x_2, ..., x_n)$).

Нагадаємо ще один логічний знак:

$\exists!$ – існує єдиний.

Зауважимо, що для одномісного предиката квантифікація перетворює його у висловлення.

Нагадаємо деякі поширені логічні закони і рівносильності. Нехай A, B, C – довільні висловлення. Тоді:

1) $A \Rightarrow A$ – закон тотожності;
2) $A \vee \overline{A}$ – закон виключення третього;
3) $(A \wedge A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ – modus ponens, правило висновку;
4) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$ – закон контрапозиції;
5) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ – закон силогізму;
6) $(\overline{A \wedge B}) \Leftrightarrow (\overline{A} \vee \overline{B}), (\overline{A \vee B}) \Leftrightarrow (\overline{A} \wedge \overline{B})$ – правила де Моргана;
7) $\overline{\forall x\, P(x)} \Leftrightarrow \exists x\, \overline{P}(x), \overline{\exists x\, P(x)} \Leftrightarrow \forall x\, \overline{P}(x)$ – правила заперечення кванторів.

Нагадаємо ще позначення основних числових множин.

N – множина натуральних чисел;

Z – множина цілих чисел;

Q – множина раціональних чисел;

I – множина ірраціональних чисел;

R – множина дійсних чисел;

C – множина комплексних чисел.

✍ Приклад 1.3. Запишіть у символьній формі речення: а) всі натуральні числа є цілими; б) якщо число a належить множині A, то і число $a + 1$ належить цій множині; в) всі натуральні числа кратні самі собі; г) існують цілі числа, які не є натуральними.

○ а) всі натуральні числа є цілими. Одне з ключових слів тут – **всі**. Отже, треба застосувати квантор загальності. Далі перепишемо це речення в умовній формі: «Для всіх натуральних чисел має місце – якщо число натуральне, то воно ціле». Маємо: $\forall n \in N \Rightarrow n \in Z$.

б) Маємо конструкцію «якщо…., то…». $a \in A \Rightarrow a+1 \in A$.

в) $\forall n \in N\ n \vdots n$. г) $\exists n \in Z\ n \notin N$.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОТРОЛЮ

1. Що таке множина? Наведіть приклади множин зі шкільного курсу математики.

2. Дайте означення підмножини. Запишіть позначення і наведіть приклади. Для множини $A=\{2,3,8\}$ запишіть її булеан. Скільки елементів він містить?

3. Дайте означення об'єднання, перетину, різниці двох множин. Запишіть позначення, зобразіть об'єднання, перетин, різницю двох множин за допомогою кругів Ейлера. Наведіть приклади таких множин, щоб: а) їхнім перетином була порожня множина; б) об'єднанням була множина натуральних чисел; в) різницею був відрізок $[1;2]$.

4. Що таке висловлення? Наведіть приклади висловлень зі шкільного курсу математики.

5. Що таке предикат? Наведіть приклади предикатів зі шкільного курсу математики.

6. Запишіть позначення основних числових множин шкільного курсу математики. Зобразіть ці множини за допомогою кругів Ейлера.

7. Запишіть пропоновані речення за допомогою символів математики. Встановіть їхню істинність:

а) Всі натуральні числа є раціональними.

б) Існують раціональні числа, які не є цілими.

в) Множини *A* та *B* рівні тоді і тільки тоді, коли кожна з них є підмножиною іншої.

8. Прочитайте пропоновані речення і запишіть їх українською мовою. Встановіть їхню істинність:

а) $\exists! x \in R\ 2^x = 8$.

б) $\forall x \in R\ \exists y \in N\ x + y = 2$.

9. Що можна сказати про множини *A* та *B*, якщо у множині $A \times B$: а) є тільки 1 елемент; б) є тільки 7 елементів?

10. Зобразіть на координатній прямій множини *A, B*, їхнє об'єднання, перетин, різницю $A \setminus B$ і $B \setminus A$, якщо $A=\{x \mid x \in Z \wedge x^2-3x+2 \le\}$, $B=\{x \mid x \in R \wedge 2^x < 0,5\}$.

Тема 1.2. Відношення на множині

1. **Поняття відношення**
2. **Властивості бінарних відношень**
3. **Відношення порядку**
4. **Відношення еквівалентності**
5. **Алгебраїчні операції**

1. Поняття відношення

Означення 1.14. *n*-арним відношенням, заданим у множині A, називається будь-яка підмножина декартового добутку $\underbrace{A\times A\times ...\times A}_{n\text{ разів}}$.

Як правило, ми будемо розглядати такі випадки:

1) $n = 1$. Тоді відношення називають *унарним.*
2) $n = 2$ – *бінарне* відношення.
3) $n = 3$ – *тернарне* відношення.

✍ Приклад 1.4. а) унарне відношення: у множині натуральних чисел відношення «безпосередньо слідувати за певним натуральним числом»; бінарне відношення: у множині прямих площини відношення паралельності прямих, відношення перпендикулярності прямих; у множині натуральних чисел відношення подільності; в) тернарне відношення: множина упорядкованих трійок піфагорових натуральних чисел, тобто $\alpha = \left\{(a,b,c) \mid a\in N, b\in N, c\in N \wedge a^2+b^2=c^2\right\}$.

Розглянемо бінарні відношення. Будемо позначати такі відношення малими літерами грецького алфавіту: $\alpha, \beta, ..., \varphi, ...\zeta$. Оскільки бінарне відношення α – це підмножина декартового квадрата множини A, тобто, $\alpha \subset A^2$, то той факт, що елементи a, b із множини A перебувають у відношенні α, *позначатимемо*: $(a,b)\in\alpha$ (читатимемо: пара (a,b) належить відношенню α або елементи a, b із множини A перебувають у відношенні α); $a\,\alpha\, b$ (читатимемо: елементи a та b

перебувають у відношенні α). Є важливі відношення, для яких існують спеціальні позначення. Наприклад, для паралельності у множині прямих або у множині площин – $a \| b$, $\alpha \| \beta$, для перпендикулярності – $a \perp b$, $\alpha \perp \beta$; у множині дійсних чисел відношення «більше» – «>» тощо.

Бінарне відношення можна задати кількома способами. Наприклад, якщо множина скінченна, то відношення можна задати:

1) переліком пар;
2) у вигляді таблиці;
3) за допомогою графа;
4) якщо множина числова, то за допомогою графіка.

✍ <u>Приклад 1.5</u>. У множині $A=\{2,4,7,14\}$ задано відношення $a \vdots b$. Задайте це відношення різними способами.

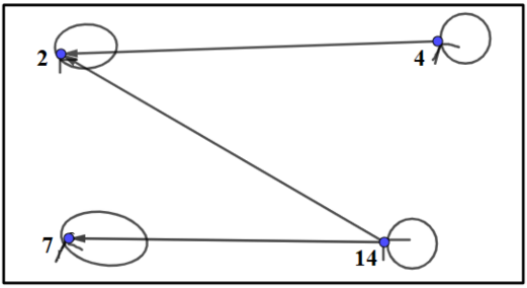
○ 1) Запишемо множину пар, перша компонента яких кратна другій компоненті:

$$\{(2,2),(4,2),(14,2),(4,4),(7,7),(14,7),(14,14)\}.$$

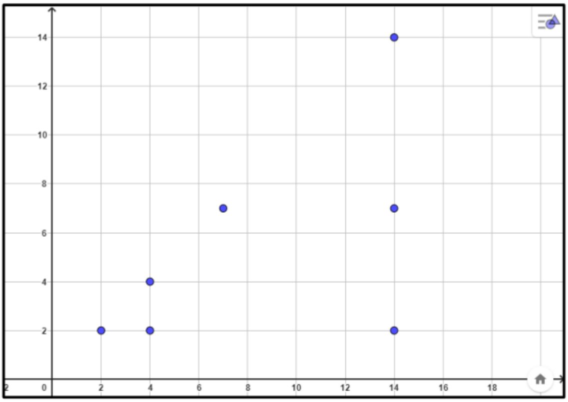
2) Таблиця вказаного відношення має вигляд (знак × стоїть на перехресті тих елементів, які знаходяться у вказаному відношенні):

	2	4	7	14
2	×			
4	×	×		
7			×	
14	×		×	×

4) Граф відношення: числа зображені точками, елементи, які знаходяться у заданому відношенні, з’єднано стрілками.



5) Графік вказаного відношення:



2. Властивості бінарних відношень

<u>*Означення 1.15.*</u> Бінарне відношення α, визначене в множині A, називають:

1) *зв'язним*, якщо $\forall a, b \in A$ виконується властивість: або (*a, b*) ∈ α, або (*b, a*) ∈ α або *a* = *b*;

2) *рефлексивним*, якщо $\forall a \in A$ виконується властивість: (*a, a*) ∈ α (кожен елемент *a* перебуває у відношенні α сам із собою);

3) *антирефлексивним,* якщо $\forall a \in A \ (a,a) \overline{\in} \alpha$ (кожен елемент *a* не перебуває у відношенні α сам із собою);

4) *симетричним*, якщо $\forall a, b \in A$ виконується властивість: (*a, b*) ∈ $\alpha \Rightarrow$ (*b*, *a*) ∈ α (якщо *a* перебуває у відношенні α з *b*, то *b* перебуває у відношенні α з *a*);

5) *несиметричним*, якщо $\forall a, b \in A$ виконується властивість (*a, b*) ∈ $\alpha \Rightarrow$ (*b, a*) ∉ α (якщо *a* перебуває у відношенні α з *b*, то *b* не

перебуває у цьому відношенні з a);

6) *антисиметричним*, якщо $\forall a,b \in A$ виконується властивість: $((a, b) \in \alpha \wedge (b, a) \in \alpha) \Rightarrow a = b$ (якщо a перебуває у відношенні α з b і навпаки, то $a = b$);

7) *транзитивним*, якщо $\forall a,b,c \in A$ виконується властивість: $(a, b) \in \alpha \wedge (b, c) \in a \Rightarrow (a, c) \in \alpha$ (якщо a перебуває у відношенні α з b, а b у відношенні α з c, то a перебуває у відношенні α з c);

8) *функціональним,* якщо $\forall a \in A\, \exists! b \in A\, (a,b) \in \alpha$ (для кожного елемента $a \in A$ існує <u>єдиний</u> елемент $b \in A$, з яким a перебуває у відношенні α).

✍ <u>Приклад 1.6</u>. З'ясуйте властивості відношення перпендикулярності у множині прямих на площині.

○Відношення не є зв'язним, бо не всі прямі або перпендикулярні між собою, або співпадають. Відношення антирефлексивне, бо кожна пряма площини не є перпендикулярною сама собі. Відношення симетричне, бо для будь-яких прямих площини виконується властивість: $a \perp b \Rightarrow b \perp a$. Відношення не є транзитивним, бо: $a \perp b \wedge b \perp c \Rightarrow a \| c$. Відношення не є функціональним, бо для кожної прямої площини існує *безліч* прямих, які перпендикулярні до заданої.

3. Відношення порядку

<u>*Означення 1.16.*</u> Бінарне відношення α, визначене в множині A, називають відношенням:

А) строгого лінійного порядку, якщо воно антирефлексивне, несиметричне, транзитивне і зв'язне;

Б) нестрогого лінійного порядку, якщо воно рефлексивне, антисиметричне, транзитивне, зв'язне;

В) строгого часткового порядку, якщо воно антирефлексивне, несиметричне, транзитивне, незв'язне;

Г) нестрогого часткового порядку, якщо воно рефлексивне, антисиметричне, транзитивне, незв'язне.

Позначення: $\succ$.

✍ <u>Приклад 1.7</u>. Чи буде відношення подільності у множині натуральних чисел відношенням порядку? Якщо так, то якого порядку?

○ Нагадаємо, що $a \vdots b \Leftrightarrow \exists n \in N\ a = b \cdot n, a \in N, b \in N$. Відношення не є зв'язним, бо, наприклад, для $a = 3, b = 5$ НЕ виконується жодне із тверджень: $3 \vdots 5, 5 \vdots 3, 3 = 5$. Відношення є рефлексивним, бо $\forall a \in N\ a \vdots a$. Дійсно, $\exists n = 1 \in N\ a = a \cdot 1$. Відношення антисиметричне. Доведемо це. Розглянемо $\forall a, b \in N$ такі, що $a \vdots b \wedge b \vdots a$. Якщо $a \vdots b$, то $\exists n \in N\ a = b \cdot n$. Якщо $b \vdots a$, то $\exists m \in N\ b = a \cdot m$. Тоді $a = b \cdot n = (a \cdot m) \cdot n = a \cdot (m \cdot n) =$ $= a \cdot k, k \in N, k = m \cdot n$. З рівності $a = a \cdot k$ слідує, що $k = 1$, тому $(m \cdot n) = 1$, отже, $m = n = 1$. Але тоді $a = b \cdot 1 = b$, що й треба було довести. Доведемо, що відношення подільності у множині натуральних чисел транзитивне. Розглянемо $\forall a, b, c \in N$, для яких $a \vdots b \wedge b \vdots c$. $a \vdots b \Rightarrow \exists n \in N\ a = b \cdot n$; $b \vdots c \Rightarrow \exists m \in N\ b = c \cdot m$. Тоді $a = b \cdot n = (c \cdot m) \cdot n = c \cdot (m \cdot n) = c \cdot k, k \in N, k = m \cdot n$. Отже, $a = c \cdot k, k \in N$. А це й означає, що $a \vdots c$. Отже, відношення подільності у множині натуральних чисел є незв'язним, рефлексивним, антисиметричним, транзитивним. Тому це відношення нестрогого часткового порядку. Зауважимо, що це відношення не є функціональним, бо, наприклад, число $a = 8$ знаходиться у відношенні подільності не з ЄДИНИМ елементом: $8 \vdots 1, 8 \vdots 2, 8 \vdots 4, 8 \vdots 8$.

<u>Означення 1.17</u> Множину A, у якій введено відношення порядку $\succ$, то таку множину називають упорядкованою множиною.

Позначення: $(A, \succ)$.

✍ <u>Приклад 1.8</u>. З прикладу 1.7 слідує, що множина натуральних чисел нестрого частково упорядкована відношенням подільності: $(N, \vdots)$ – упорядкована множина.

4. Відношення еквівалентності

<u>*Означення 1.18.*</u> Рефлексивне, симетричне і транзитивне відношення називають відношенням еквівалентності.

✍ <u>Приклад 1.8</u>. а) Прямі на площині називатимемо паралельними, якщо вони не перетинаються або співпадають. Тоді відношення паралельності у множині прямих площини є відношенням еквівалентності.

б) Відношення $a \equiv b (\mathrm{mod}\, m), m \in N, m > 1$ є відношенням еквівалентності у множині цілих чисел.

Відношення еквівалентності тісно пов'язане з розбиттям множини.

<u>*Означення 1.19.*</u> Систему $P = \{X_i\}, i \in N$ непорожніх підмножин заданої множини A називають її розбиттям, якщо:

1) різні елементи з P не мають спільних елементів
$$(\forall X_i \in P\; X_i \cap X_j = \varnothing, i \neq j);$$
2) об'єднання всіх елементів з P дорівнює множині A
$$(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = A).$$

Нагадаємо, що множина P може бути й скінченною.

✍ <u>Приклад 1.9</u>. Нехай $A = N$. Можна розглянути такі розбиття:

а) $P = \{X_1, X_2\}$, де X_1 – множина парних натуральних чисел, X_2 – множина непарних натуральних чисел;

б) $P = \{\{1\}, \Pi, C\}$, де Π – множина простих чисел, C – множина складених чисел.

Відношення еквівалентності завжди розбиває множину, у якій воно задане, на підмножини, які називаються *класами еквівалентності*.

✍ <u>Приклад 1.10</u>. Відношення $a \equiv b (\mathrm{mod}\, 3)$ є відношенням еквівалентності у множині цілих чисел. Відповідні класи еквівалентності (їх називають ще класами лишків за модулем 3):

$\overline{0}$ – множина тих цілих чисел, які кратні 3 (остача від ділення на 3 дорівнює 0), $\overline{1}$ – множина тих цілих чисел, для яких остача від ділення на 3 дорівнює 1, $\overline{2}$ – множина тих цілих чисел, для яких остача від ділення на 3 дорівнює 2.

5. Алгебраїчні операції

<u>Означення 1.20.</u> Бінарне функціональне відношення α, визначене у множині A, називається унарною алгебраїчною операцією на множині A.

Отже, унарна алгебраїчна операція має такі властивості:

1) ця операція всюди визначена на A;
2) результат цієї операції однозначний;
3) результат цієї операції належить множині A.

✍ <u>Приклад 1.11</u>. У множині цілих чисел Z розглянемо відношення α: $\alpha=\{(a,b)\,|\,a\in Z, b\in Z\wedge b=-a\}$. Це унарна алгебраїчна операція на множині цілих чисел, яка полягає в тому, що кожному цілому числу співставляється йому протилежне.

<u>Означення 1.21.</u> Тернарне функціональне відношення α, визначене у множині A, називається бінарною алгебраїчною операцією на множині A.

Отже, бінарна алгебраїчна операція, як і унарна, має такі властивості:

1) ця операція всюди визначена на A;
2) результат цієї операції однозначний;
3) результат цієї операції належить множині A.

✍ <u>Приклад 1.12</u>. $\alpha=\{(a,b,c)\,|\,a\in Z, b\in Z, c\in Z\wedge a+b=c\}$ – алгебраїчна операція додавання цілих чисел.

✍ <u>Приклад 1.13</u>.
$\alpha=\{(a,b,c)\,|\,a\in N, b\in N, c\in N\wedge a^2+b^2=c^2\}$ – це тернарне відношення не задає алгебраїчної операції на множині натуральних чисел. Дійсно, не для будь-якої пари натуральних

чисел (a,b) існує таке натуральне число c, щоб виконувалася рівність $a^2 + b^2 = c^2$.

Позначення: якщо мова йтиме про довільні алгебраїчні операції, то позначатимемо їх $*$.

Крім алгебраїчних операцій, розглядають часткові алгебраїчні операції (або просто операції). Це такі, для яких зберігається однозначність, але вони не є всюди визначені.

✍ Приклад 1.14. Операція віднімання на множині натуральних чисел – часткова алгебраїчна операція.

Те, чи буде операція алгебраїчною, значною мірою залежить від множини, на якій вона (ця операція) розглядається. Так, операція додавання на множині натуральних чисел алгебраїчна (це буде доведено пізніше), а на множині ірраціональних чисел вона такою вже не буде. Дійсно, сума двох ірраціональних чисел $1-\sqrt{2}$ і $1+\sqrt{2}$ не є число ірраціональне.

Означення 1.22. Бінарна алгебраїчна операція $*$, задана на множині A, називається:

1) комутативною, якщо $\forall a,b \in A \; a*b = b*a$;

2) асоціативною, якщо $\forall a,b,c \in A \; a*(b*c) = (a*b)*c$.

Означення 1.23. Бінарна алгебраїчна операція $*$, задана на множині A, називається дистрибутивною зліва відносно бінарної алгебраїчної операції $\oplus$, заданої на цій самій множині, якщо $\forall a,b,c \in A \; a*(b \oplus c) = (a*b) \oplus (a*c)$.

Означення 1.24. Бінарна алгебраїчна операція $*$, задана на множині A, називається дистрибутивною справа відносно бінарної алгебраїчної операції $\oplus$, заданої на цій самій множині, якщо $\forall a,b,c \in A \; (b \oplus c)*a = (b*a) \oplus (c*a)$.

Означення 1.25. Бінарна алгебраїчна операція $*$, задана на множині A, яка є дистрибутивною і зліва, і справа відносно бінарної алгебраїчної операції $\oplus$, заданої на цій самій множині, називається дистрибутивною відносно бінарної алгебраїчної операції $\oplus$.

✍ Приклад 1.15. Алгебраїчна операція множення на множині натуральних чисел комутативна (це буде доведено пізніше), а на множині квадратних матриць розмірності $n \times n$ – ні.

✍ Приклад 1.16. Алгебраїчна операція додавання на множині цілих чисел асоціативна, а алгебраїчна операція віднімання на множині цілих чисел не є асоціативною.

✍ Приклад 1.17. Алгебраїчна операція об'єднання множин є дистрибутивною відносно алгебраїчної операції перетину множин.

Означення 1.26. Якщо α – бінарне відношення в множині A, $*$ – бінарна алгебраїчна операція на A, то відношення α називають монотонним відносно операції $*$, якщо

$$\forall a,b,c \in A\ (a,b) \in \alpha \Rightarrow (a*c, b*c) \in \alpha \wedge (c*a, c*b) \in \alpha .$$

Приклад 1.18. Нехай $A = N$, α – відношення >, $*$ – операція додавання. Оскільки $\forall a,b,c \in N\ a > b \Rightarrow a+c > b+c$ $\wedge c+a > c+b$, то відношення > є монотонним відносно операції додавання.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОТРОЛЮ

1. Сформулюйте означення унарного відношення. Наведіть приклади такого відношення у числовій множині, у множині всіх множин.
2. Сформулюйте означення бінарного відношення. Наведіть приклади такого відношення у числовій множині, у множині всіх множин.
3. Наведіть приклад відношень зі шкільного курсу математики. Виберіть одне з них і дослідіть його властивості.
4. У множині $A = \{1,3,5,6,7\}$ задано відношення α: $(x,y) \in \alpha \Leftrightarrow (x+y) \vdots 2$. Задайте це відношення переліком пар, таблицею, графом і графіком. Встановіть властивості цього відношення. Чи є воно відношенням порядку? Еквівалентності?
5. Побудуйте графік відношення $\alpha = \left\{(x,y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \le 4\right\}$. Дослідіть властивості цього відношення.
6. Наведіть приклад нерефлексивного відношення. Які особливості має граф такого відношення?
7. Наведіть приклад нетранзитивного відношення. Які особливості має граф такого відношення?
8. Наведіть приклад відношення, яке:

а) рефлексивне, симетричне, транзитивне;

б) рефлексивне, несиметричне, транзитивне;

в) нерефлексивне, симетричне, транзитивне.

9. Сформулюйте означення унарної алгебраїчної операції. Наведіть приклад.

10. Сформулюйте означення бінарної алгебраїчної операції. Наведіть приклад.

11. Чи буде операція знаходження спільного дільника двох натуральних чисел алгебраїчною на множині натуральних чисел? А знаходження найбільшого спільного дільника?

12. Наведіть приклад алгебраїчної операції, яка є комутативна й асоціативна; некомутативна й асоціативна; дистрибутивна.

Тема 1.3. Алгебраїчні структури. Упорядковані алгебраїчні структури

1. **Поняття алгебраїчної структури**
2. **Півгрупа. Група.**
3. **Півкільце. Кільце.**
4. **Тіло. Поле. Лінійні алгебри над полем.**
5. **Упорядковаі групи й півгрупи.**
6. **Упорядковані півкільця й кільця**
7. **Упорядковані поля.**

1. Поняття алгебраїчної структури

Означення 1.27. Нехай A – непорожня множина, $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ – множина визначених на A алгебраїчних операцій, $\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ – множина фіксованих елементів із A. Тоді упорядковану трійку $(A, \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}, \{a_1, a_2, \ldots, a_s\})$ називають алгебраїчною структурою (алгеброю). Множину A називають носієм алгебраїчної структури.

У подальших викладках ми не будемо одночасно розглядати більше двох алгебраїчних операцій, відношень і фіксованих елементів множини A. А тому упорядковану трійку будемо, як правило, записувати без внутрішніх фігурних дужок, а інколи і без множини фіксованих елементів.

✍ Приклад 1.18. На одній і тій самій множині можна побудувати різні алгебраїчні структури. Так, структури $(N,+)$, $(N,\cdot)$ мають одного й того самого носія, але різні алгебраїчні операції. Тому це різні алгебри.

✍ Приклад 1.19. Операція об’єднання множин є алгебраїчною на булеані деякої множини M. Тому $(P(M), \cup)$ – алгебраїчна структура. Носій цієї алгебри – множина $P(M)$ – булеан множини M.

2. Півгрупа. Група.

<u>Означення 1.27.</u> Алгебраїчну структуру $(G,\ *)$ називають півгрупою, якщо операція $*$ є асоціативною, тобто

$$\forall a,b,c \in G\ a*(b*c)=(a*b)*c$$

✍ <u>Приклад 1.19.</u> $(N,+)$, $(N,\cdot)$ – півгрупи.

<u>Означення 1.28.</u> Алгебраїчну структуру $(G,\ *)$ називають півгрупою з одиницею, якщо:

1) $\forall a,b,c \in G\ a*(b*c)=(a*b)*c$ (операція асоціативна);

2) $\exists e \in G\ \forall a \in G\ a*e=e*a=a$ (існує нейтральний елемент).

✍ <u>Приклад 1.20.</u> $(N,\cdot)$ – півгрупа з одиницею, $e = 1$.

<u>Означення 1.29.</u> Алгебраїчну структуру $(G,\ *)$ називають групою, якщо:

1) $\forall a,b,c \in G\ a*(b*c)=(a*b)*c$ (операція асоціативна);

2) $\exists e \in G\ \forall a \in G\ a*e=e*a=a$ (існує нейтральний елемент).

3) $\forall a \in G\ \exists a^{-1} \in G\ a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$ (існує симетричний елемент).

✍ <u>Приклад 1.21.</u> $(N,+)$, $(N,\cdot)$ – не є групами. Дійсно, у множині натуральних чисел нема нейтрального елемента відносно операції додавання, нема симетричного елемента як відносно операції додавання, так і відносно операції множення. Алгебраїчна структура $(Z,+)$ – група. Дійсно, операція додавання асоціативна, існує нейтральний елемент – число нуль, для кожного цілого числа існує симетричний елемент – протилежне число.

Якщо групова операція є додаванням, то групу називають *адитивною*. У такій групі нейтральний *елемент* називають *нульовим,* а симетричний – *протилежним.*

Якщо групова операція є множенням, то групу називають *мультиплікативною*. У такій групі нейтральний *елемент* називають *одиничним,* а симетричний – *оберненим.*

✍ <u>Приклад 1.22.</u> $(Z,+)$ – адитивна група, $(Q,\cdot)$ – мультиплікативна група.

Означення 1.30. Якщо $(G, *)$ – група і $\forall a,b \in G\ a*b = b*a$, то група називається абелевою (комутативною).

3. Півкільце. Кільце.

Означення 1.31. Алгебраїчну структуру $(K,\oplus,\otimes)$ називають півкільцем, якщо:

1) $\forall a,b \in K\ a \oplus b = b \oplus a$

   (операція $\oplus$ комутативна);

2) $\forall a,b,c \in K\ a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$

   (операція $\oplus$ асоціативна);

3) $\exists e \in K\ \forall a \in K\ a \oplus e = a$

   (існує нейтральний елемент відносно операції $\oplus$);

4) $\forall a,b,c \in K\ a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$

   (операція $\otimes$ асоціативна);

5) $\forall a,b,c \in K\ a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$

   (ліва дистрибутивність операції $\otimes$ відносно $\oplus$);

6) $\forall a,b,c \in K\ (b \oplus c) \otimes a = (b \otimes a) \oplus (c \otimes a)$

   (права дистрибутивність операції $\otimes$ відносно $\oplus$).

✍ Приклад 1.23. Множина натуральних чисел з операціями додавання й множення є півкільцем. Його позначають $(N,+,\cdot)$.

Означення 1.32. Півкільце $(K,\oplus,\otimes)$ називають:

а) півкільцем з одиницею, якщо у ньому існує нейтральний елемент відносно операції $\otimes$:

$$\exists e' \in K\ \forall a \in K\ a \otimes e' = e' \otimes a = a;$$

б) комутативним півкільцем, якщо операція $\otimes$ комутативна:

$$\forall a,b \in K\ a \otimes b = b \otimes a.$$

✍ Приклад 1.24. Півкільце $(N,+,\cdot)$ є півкільцем з одиницею ($e' = 1$) і є комутативним півкільцем, бо алгебраїчна операція множення є комутативною.

Означення 1.33. Алгебраїчну структуру $(K,\oplus,\otimes)$ називають кільцем, якщо:

1) $\forall a,b \in K\ a \oplus b = b \oplus a$

(операція $\oplus$ комутативна);

2) $\forall a,b,c \in K\ a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$

(операція $\oplus$ асоціативна);

3) $\exists e \in K\ \forall a \in K\ a \oplus e = a$

(існує нейтральний елемент відносно операції $\oplus$);

4) $\forall a \in K\ \exists a^{-1} \in K\ a \oplus a^{-1} = e$

(для кожного елемента в кільці існує симетричний елемент відносно операції $\oplus$);

5) $\forall a,b,c \in K\ a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$

(операція $\otimes$ асоціативна);

6) $\forall a,b,c \in K\ a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$

(ліва дистрибутивність операції $\otimes$ відносно $\oplus$);

7) $\forall a,b,c \in K\ (b \oplus c) \otimes a = (b \otimes a) \oplus (c \otimes a)$

Іншими словами, півкільце $(K, \oplus, \otimes)$ буде кільцем, якщо його адитивна частина $(K, \oplus)$ є групою.

✍ <u>Приклад 1.25.</u> $(Z, +, \cdot)$ – кільце цілих чисел з звичними для нас операціями додавання і множення.

○ Дійсно, всі аксіоми кільця виконуються (зараз ми їх тільки запишемо, спираючись на досвід здобувачів освіти, пізніше властивості буде доведено):

1) $\forall a,b \in Z\ a + b = b + a$ (операція $+$ комутативна);

2) $\forall a,b,c \in Z\ a + (b + c) = (a + b) + c$ (операція $+$ асоціативна);

3) $\exists 0 \in Z\ \forall a \in Z\ a + 0 = a$ (існує нульовий елемент);

4) $\forall a \in Z\ \exists -a \in Z\ a + (-a) = 0$ (існує протилежний елемент);

5) $\forall a,b,c \in Z\ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (операція $\cdot$ асоціативна);

6) $\forall a,b,c \in Z\ a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

(ліва дистрибутивність операції $\cdot$ відносно $+$);

7) $\forall a,b,c \in Z\ (b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$

(права дистрибутивність операції $\cdot$ відносно $+$).

Крім того, $\exists 1 \in Z\ \forall a \in Z\ a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ і $\forall a, b \in Z\ a \cdot b = b \cdot a$. Отже, кільце $(Z, +, \cdot)$ є комутативним кільцем з одиницею. Зауважимо, що у цьому випадку аксіому 7) можна не писати.

✍ <u>Приклад 1.26.</u> Множина всіх квадратних матриць *n*-го порядку з дійсними елементами відносно загальновживаних операцій додавання і множення матриць є некомутативне кільце з одиницею. *Позначення*: $(M_{n\times n}, +, \cdot)$.

Зауважимо, що кожне кільце $(K, \oplus, \otimes)$ містить нейтральний елемент відносно операції $\oplus$. Нагадаємо, що часто його називають нульовим і позначають 0 (підкреслимо, це не обов'язково дійсне число 0! Так, наприклад, нульовий елемент кільця з попереднього прикладу – це матриця *n*-го порядку, всі елементи якої дорівнюють нулю).

<u>*Означення 1.34.*</u> Елементи *a*, *b* кільця $(K, \oplus, \otimes)$ називають дільниками нуля, якщо $a \neq 0 \wedge b \neq \wedge a \otimes b = 0$ (добуток двох ненульових елементів дорівнює нулю).

✍ <u>Приклад 1.27</u>. Кільце $(Z, +, \cdot)$ не має дільників нуля, тобто, у цьому кільці добуток двох елементів дорівнює нулю, тоді і тільки тоді, коли хоча б один з елементів дорівнює нулю. А кільце $(M_{n\times n}, +, \cdot)$ має дільники нуля. Дійсно, розглянемо для *n* = 2 добуток таких двох матриць: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Як бачимо, кожна із заданих двох матриць не є нульовими, але їхній добуток – матриця нульова.

4. Тіло. Поле. Лінійні алгебри над полем.

<u>*Означення 1.35.*</u> Кільце $(T, \oplus, \otimes)$ називають тілом, якщо алгебраїчна структура $(T \setminus \{0\}, \otimes)$ є групою.

Іншими словами, якщо $(T, \oplus)$ – комутативна група, $(T \setminus \{0\}, \otimes)$ – група, операція $\otimes$ є дистрибутивною (зліва і справа) відносно операції $\oplus$, то $(T, \oplus, \otimes)$ – тіло.

Означення 1.36. Комутативне тіло $(P,\oplus,\otimes)$ називають полем.

Випишемо всі аксіоми поля $(P,\oplus,\otimes)$:

1) $\forall a,b\in P\ a\oplus b=b\oplus a$

(операція $\oplus$ комутативна);

2) $\forall a,b,c\in P\ a\oplus(b\oplus c)=(a\oplus b)\oplus c$

(операція $\oplus$ асоціативна);

3) $\exists e\in P\ \forall a\in P\ a\oplus e=a$

(існує нейтральний елемент відносно операції $\oplus$);

4) $\forall a\in P\ \exists a^{-1}\in P\ a\oplus a^{-1}=e$

(для кожного елемента в кільці існує симетричний елемент відносно операції $\oplus$);

5) $\forall a,b\in P\ a\otimes b=b\otimes a$

(операція $\otimes$ комутативна);

6) $\forall a,b,c\in P\ a\otimes(b\otimes c)=(a\otimes b)\otimes c$

(операція $\otimes$ асоціативна);

7) $\exists e'\in P\ \forall a\in P\ a\otimes e'=a$

(існує нейтральний елемент відносно операції $\otimes$);

8) $\forall a\in P\setminus\{0\}\ \exists a^{-1}\in P\ a\otimes a^{-1}=e'$

(для кожного елемента в кільці існує симетричний елемент відносно операції $\otimes$);

9) $\forall a,b,c\in P\ a\otimes(b\oplus c)=(a\otimes b)\oplus(a\otimes c)$

(операція $\otimes$ дистрибутивна відносно операції $\oplus$).

✍ <u>Приклад 1.28.</u> Множини раціональних чисел, дійсних чисел, комплексних чисел є полем з алгебраїчними операціями додавання і множення. *Позначення*: $(Q,+,\cdot)$, $(R,+,\cdot)$, $(C,+,\cdot)$.

✍ <u>Приклад 1.29.</u> На множині $P=\left\{x\mid x=a+b\sqrt{3}, a\in Q, b\in Q\right\}$ розглянемо операції додавання і множення за правилами:

$x+y=(a+b\sqrt{3})+(c+d\sqrt{3})=(a+c)+(b+d)\sqrt{3}$;

$x\cdot y=(a+b\sqrt{3})\cdot(c+d\sqrt{3})=(a\cdot c+3\cdot b\cdot d)+(a\cdot d+b\cdot c)\sqrt{3}$.

○ Оскільки сума і добуток раціональних чисел є число раціональне, то $\forall x, y \in P\ x + y \in P \wedge x \cdot y \in P$. Тому так введені операції додавання і множення є алгебраїчними на множині *P*. Оскільки операції над елементами множини *P* зводяться до відповідних операцій над раціональними числами, то ці операції на множині *P* є комутативними, асоціативними і операція множення дистрибутивна відносно операції додавання. Покажемо існування у множині *P* нульового, одиничного, протилежного і оберненого елементів. Нульовий елемент: $0 + 0 \cdot \sqrt{3} \in P$, протилежний: $\forall a + b\sqrt{3} \in P\ \exists(-a + (-b)\sqrt{3}) \in P$ $a + b\sqrt{3} + (-a + (-b)\sqrt{3}) = 0 + 0 \cdot \sqrt{3}$; одиничний елемент: $1 + 0 \cdot \sqrt{3} \in P$; обернений елемент: розглянемо $\forall a + b\sqrt{3} \in P$, $a \neq 0 \wedge b \neq 0$ і визначимо такий елемент $c + d\sqrt{3} \in P$, щоб $\left(a + b\sqrt{3}\right) \cdot \left(c + d\sqrt{3}\right) = 1 + 0 \cdot \sqrt{3}$. Розглянемо $(a + b\sqrt{3}) \cdot (c + d\sqrt{3}) =$ $(a \cdot c + 3 \cdot b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)\sqrt{3} = 1 + 0 \cdot \sqrt{3}$. Маємо систему $\begin{cases} ac + 3bd = 1, \\ ad + dc = 0. \end{cases}$ Враховуючи, що a та b відомі, знайдемо c та d.

Виразимо з 2-го рівня d: $d = -\dfrac{b}{a} \cdot c$. Підставимо у 1-е рівняння: $ac + 3b\left(-\dfrac{b}{a} \cdot c\right) = 1$. Тоді $c = \dfrac{a}{a^2 - 3b^2} \in P$, і $d = -\dfrac{b}{a} \cdot \left(\dfrac{a}{a^2 - 3b^2}\right)$, $d = -\dfrac{b}{a^2 - 3b^2} \in P$. Отже, $\forall a + b\sqrt{3} \in P$ існує обернений і належить множині *P*. Таким чином, множина $P = \left\{x \mid x = a + b\sqrt{3}, a \in Q, b \in Q\right\}$ з введеними операціями додавання і множення є полем.

<u>*Означення 1.36*</u>. Нехай *K* – кільце, *P* – поле і $\forall x \in K\ \forall \alpha \in P$ введено операцію множення $\alpha \cdot x$, яка задовольняє такі умови (аксіоми):

1) $\forall x \in K \; 1 \cdot x = x$;

2) $\forall x, y \in K \; \forall \alpha \in P \; \alpha \cdot (xy) = (\alpha \cdot x) y$;

3) $\forall x \in K \; \forall \alpha, \beta \in P \; (\alpha\beta) \cdot x = \alpha(\beta \cdot x)$;

4) $\forall x, y \in K \; \forall \alpha \in P \; \alpha \cdot (x + y) = (\alpha \cdot x) + (\alpha \cdot y)$;

5) $\forall x \in K \; \forall \alpha, \beta \in P \; (\alpha + \beta) \cdot x = (\alpha \cdot x) + (\beta \cdot x)$.

Тоді систему (K, P) називають лінійною алгеброю над полем P.

<u>*Означення 1.37.*</u> Лінійну алгебру (K, P) називають алгеброю з діленням, якщо кільце K – кільце з одиницею і для кожного ненульового елемента із кільця існує обернений.

✍ <u>Приклад 1.30.</u> Множина $M_{n\times n}$ квадратних матриць n-ого порядку над полем дійсних чисел є лінійною алгеброю без ділення над полем дійсних чисел відносно операції множення дійсного числа на матрицю: $(M_{n\times n}, R)$.

✍ <u>Приклад 1.31.</u> Множина комплексних чисел C утворює лінійну алгебру з діленням над полем дійсних чисел R відносно операції множення дійсного числа на комплексне число: (C, R).

<u>*Означення 1.38.*</u> Нехай (K, P) – лінійна алгебра над полем P і в кільці існує n лінійно незалежних над полем P елементів $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ таких, що $\forall x \in K \; x = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots x_n\alpha_n$. Тоді алгебру (K, P) називають алгеброю рангу n над полем P, а систему елементів $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ – базисом алгебри (K, P).

✍ <u>Приклад 1.32</u>. а) Поле P є лінійною алгеброю рангу один над полем P. Зокрема, поле дійсних чисел є лінійною алгеброю рангу один над полем дійсних чисел.

б) Поле комплексних чисел є лінійною алгеброю рангу два над полем дійсних чисел. Базисом можна взяти множину 1, i.

✍ <u>Приклад 1.33.</u> Алгебра кватерніонів. Розглянемо над полем дійсних чисел кільце, базисом якого є лінійно незалежні елементи $1, i, j, k$, множення яких відбувається за такими правилами:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk\,,\; ij = -ji = k\,,\; jk = -kj = i\,,\; ki = -ik = j\,.$$

Тоді кожен елемент кільця можна записати у вигляді

$$q = a + bi + cj + dk\ .$$

Елемент такого вигляду називають кватерніоном, а кільце – алгеброю кватерніонів. Ця алгебра має ранг чотири над полем дійсних чисел. Додавання кватерніонів є комутативним і асоціативним, множення – асоціативним і НЕ є комутативним. Тому лінійна алгебра кватерніонів над полем дійсних чисел є тілом, але не є полем. Зазвичай алгебру кватерніонів *позначають* $\mathbb{H}$ (або просто *H*).

5. Упорядковаі групи й півгрупи.

<u>*Означення 1.39.*</u> Алгебраїчну структуру (G, $*$, $\succ$) називають упорядкованою півгрупою, якщо виконуються такі умови (аксіоми):

1) алгебра (G, $*$) – півгрупа;

2) множина (G, $\succ$) упорядкована відношенням порядку $\succ$;

3) відношення $\succ$ монотонне відносно групової операції, тобто

$$\forall a \in G\ \ \forall b \in G\ \ \forall c \in G\ \ (a \succ b \Rightarrow a * c \succ b * c \wedge c * a \succ c * b).$$

<u>*Означення 1.40.*</u> Алгебраїчну структуру (G, $*$, $\succ$) називають упорядкованою групою, якщо виконуються такі умови (аксіоми):

1) алгебра (G, $*$) – група;

2) множина (G, $\succ$) упорядкована відношенням порядку $\succ$;

3) відношення $\succ$ монотонне відносно групової операції, тобто

$$\forall a \in G\ \ \forall b \in G\ \ \forall c \in G\ \ (a \succ b \Rightarrow a * c \succ b * c \wedge c * a \succ c * b).$$

✍ <u>Приклад 1.34</u>. Алгебраїчні системи $(N, \cdot, ⋮)$, $(N, \cdot, >)$ є упорядкованими півгрупами. $(N, \cdot, ⋮)$ – нестрого частково упорядкована півгрупа, $(N, \cdot, >)$ – строго лінійно упорядкована півгрупа.

✍ <u>Приклад 1.35.</u> Алгебраїчна система $(Z, +, >)$ – строго лінійно упорядкована група.

Введемо *позначення*: якщо $n \in N \wedge a \in G$, де $(G, +, \succ)$ – лінійно і строго упорядкована півгрупа, то $n \cdot a = \underbrace{a + a + a + \cdots a}_{n \text{ доданків}}$.

Сформулюємо властивості упорядкованих півгруп у вигляді теорем.

Теорема 1.2. Якщо $(G, +, \succ)$ – упорядкована півгрупа, то:

1) $\forall a \in G\ \forall b \in G\ \forall c \in G\ \forall d \in G\ (a \succ b \wedge c \succ d \Rightarrow a + c \succ b + d)$;

2) $\forall a \in G\ \forall b \in G\ \forall n \in N\ (a \succ b \Rightarrow n \cdot a \succ n \cdot b)$.

Зокрема, якщо $(G, +, \succ)$ – лінійно і строго впорядкована півгрупа, то $\forall a \in G\ \ \forall b \in G\ \ \forall n \in N\ (a \succ b \Leftrightarrow n \cdot a \succ n \cdot b)$.

• Доведення. 1) $a \succ b \wedge c \succ d \Rightarrow a + c \succ b + c \wedge b + c \succ b + d \Rightarrow a + c \succ b + d$.

2) Другу частину теореми доведемо індукцією за n. Нехай M – множина тих n, для яких 2) справджується. Тоді $1 \in M$, бо $a \succ b \Rightarrow 1 \cdot a \succ 1 \cdot b$. Нехай $n \in M$, тобто $a \succ b \Rightarrow n \cdot a \succ n \cdot b$. З цього співвідношення, першої частини теореми і рівностей

$$(n + 1) \cdot a = n \cdot a + a, \quad (n + 1) \cdot b = n \cdot b + b$$

Маємо: $a \succ b \Rightarrow n \cdot a \succ n \cdot b \Rightarrow n \cdot a + a \succ n \cdot b + b \Rightarrow (n + 1) \cdot a \succ (n + 1) \cdot b$, тобто $n + 1 \in M$. Отже, $M = N$.

Нехай тепер $(G, +, \succ)$ – лінійно і строго впорядкована півгрупа і дано, що $n \cdot a \succ n \cdot b$. Тоді $a \neq b$, бо тоді б мали, що $n \cdot a \succ n \cdot a$, а це неможливо, бо за умовою порядок $\succ$ строгий. Оскільки порядок $\succ$ лінійний, то $a \neq b \Rightarrow a \succ b \vee b \succ a$. Випадок $b \succ a$ відпадає, бо тоді, як було доведено, $n \cdot b \succ n \cdot a$. А оскільки за умовою $n \cdot a \succ n \cdot b$, то з властивості транзитивності знову мали б, що $n \cdot b \succ n \cdot b$, а це неможливо. Отже, $a \succ b$. ■

Теорема 1.3. Якщо $(G, *, \succ)$ – лінійно і строго впорядкована півгрупа, то:

1) $\forall a \in G\ \forall b \in G\ \forall c \in G\ (a * c = b * c \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow c * a = c * b)$;

2) $\forall a \in G\ \forall b \in G\ \forall c \in G\ (a * c \succ b * c \Leftrightarrow a \succ b \Leftrightarrow c * a \succ c * b)$.

Теорема 1.4. Нехай $(G, +, \succ)$ – лінійно і строго впорядкована півгрупа; $a \in A,\ a \neq a + a = 2a$. Тоді елементи $a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots$ усі різні.

Теорема 1.5. Лінійно і строго впорядкована півгрупа – нескінченна.

<u>Означення 1.41</u>. Елемент a впорядкованої півгрупи $(G, +, \succ)$ називають додатним якщо, коли $a + a \succ a \wedge a \neq a + a$, і від'ємним, якщо $a \succ a + a \wedge a \neq a + a$.

Теорема 1.6. Якщо $(G, +, 0, \succ)$ – лінійно і строго впорядкована півгрупа, то елемент $a \in G$ додатний тоді і тільки тоді, коли $a \succ 0$.

6. Упорядковані півкільця й кільця

<u>Означення 1.42.</u> Алгебраїчну систему $(K, +, \cdot, \succ)$ називають упорядкованим півкільцем, якщо виконуються умови (аксіоми):

1) алгебра $(K, +, \cdot)$ – півкільце;

2) алгебраїчна система $(K, +, \succ)$ – лінійно і строго упорядкована півгрупа з непорожньою множиною K^+ додатних елементів;

3) $\forall a \in K\ \forall b \in K\ \forall c \in K\ (a \succ b \wedge c \in K^+ \Rightarrow a \cdot c \succ b \cdot c \wedge c \cdot a \succ c \cdot b)$.

Множину K^+ називають множиною додатних елементів упорядкованого півкільця K, яка відповідає даному порядку.

<u>Означення 1.43.</u> Якщо у впорядкованому півкільці виконується умова $\forall a \in K^+\ \forall b \in K^+\ \exists n \in N\ \ (n \cdot a \succ b)$, то його називають архімедівськи впорядкованим півкільцем, а відповідний порядок – архімедовим.

✍ <u>Приклад 1.36.</u> Алгебраїчна система $(N, +, \cdot, >)$ – строго лінійно архімедівськи впорядковане півкільце.

<u>Означення 1.44.</u> Алгебраїчну систему $(K, +, \cdot, \succ)$ називають упорядкованим кільцем, якщо виконуються умови (аксіоми):

1) алгебра $(K, +, \cdot)$ – кільце;

2) алгебраїчна система $(K, +, \succ)$ – лінійно і строго упорядкована група з непорожньою множиною K^+ додатних елементів;

3) $\forall a \in K\ \forall b \in K\ \forall c \in K\ (a \succ b \wedge c \in K^+ \Rightarrow a \cdot c \succ b \cdot c \wedge c \cdot a \succ c \cdot b)$.

✍ <u>Приклад 1.37.</u> Алгебраїчна система $(Z, +, \cdot, >)$ – строго лінійно архімедівськи впорядковане кільце, для якого $K^+ = N$.

Теорема 1.6. Нехай (K, +, ·, 0, $\succ$) – упорядковане кільце. Тоді $\forall a \in K$ (a = 0 $\vee$ $a \succ 0$ $\vee$ $-a \succ$ 0 (0 – нуль кільця, $-a$ – протилежний елемент).

• Доведення. Нехай $a \neq 0$. Оскільки (K, +, $\succ$) – лінійно і строго упорядкована група, то тоді $a \succ 0 \vee 0 \succ a$. Якщо $0 \succ a$, то $-a + 0 \succ -a + a$, тобто $-a \succ 0$.■

Терема 1.7. Сума і добуток додатних елементів упорядкованого півкільця – додатні.

Теорема 1.8. Упорядковане кільце не має дільників нуля.

Теорема 1.9. У будь-якому впорядкованому кільці квадрат його відмінного від нуля елемента додатний.

7. **Упорядковані поля**

Означення 1.45. Алгебраїчну систему (P, +, · , $\succ$) називають упорядкованим тілом (полем), якщо виконуються умови (аксіоми):

1) алгебра (P, +, ·) – тіло (поле);
2) алгебраїчна система (P, +, $\succ$) – лінійно і строго упорядкована група з непорожньою множиною P^+ додатних елементів;
3) $\forall a \in P\ \forall b \in P\ \forall c \in P$ $(a \succ b \wedge c \in K^+ \Rightarrow a \cdot c \succ b \cdot c \wedge c \cdot a \succ c \cdot b)$.

✍ Приклад 1.38. Алгебраїчна система $(R, +, \cdot, >)$ – строго лінійно архімедівськи впорядковане поле.

Теорема 1.10. Кожне архімедівськи упорядковане тіло комутативне.

Підкреслимо, що вивчаючи основні числові системи (натуральних, цілих, раціональних, дійсних, комплексних чисел), ми будемо отримувати властивості основних операцій у цих числових системах загальним методом, виходячи з відповідних систем аксіом (які характеризують певні класи алгебр). Відношення порядку в цих числових системах також вводитимемо, виходячи із загальних властивостей відповідних упорядкованих алгебр.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОТРОЛЮ

1. Сформулюйте означення півгрупи, упорядкованої півгрупи. Наведіть приклади.
2. Сформулюйте означення групи, упорядкованої групи. Наведіть приклади.
3. Сформулюйте означення півкільця, упорядкованого півкільця. Наведіть приклади.
4. Сформулюйте означення півкільця (кільця) з одиницею. Запишіть ці означення символами.
5. Що таке дільник нуля? Вкажіть застосування твердження, сформульованого в Прикладі 1.27 у шкільному курсі математики
6. Сформулюйте означення поля, упорядкованого поля. Наведіть приклади.
7. Сформулюйте означення лінійної алгебри над полем.
8. Обґрунтуйте твердження, записане у Прикладі 1.30.
9. Назвіть основні властивості упорядкованої півгрупи.
10. Назвіть основні властивості упорядкованого кільця.

Тема 1.4. Абсолютна величина елемента лінійно і строго упорядкованого кільця. Критерії

1. **Абсолютна величина елемента кільця. Властивості абсолютної величини**
2. **Критерій можливості впорядкування кільця (поля)**
3. **Критерій однозначності порядку**
4. **Критерій можливості продовження порядку**

1. Абсолютна величина елемента кільця. Властивості абсолютної величини

Означення 1.45. Нехай $(K, +, \cdot, 0, \succ)$ – упорядковане кільце, $a \in K$. Тоді модулем (абсолютною величиною) елемента a називають max $(a, -a)$ і позначають $|a|$.

Можна показати, що $|a| = a \Leftrightarrow a \succ 0$ і $|a| = -a \Leftrightarrow -a \succ 0$.

Властивості абсолютної величини.

1. $\forall a \in K$ $(|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0)$.
2. $\forall a \in K$ $(|a| \succ 0 \Leftrightarrow a \neq 0)$.
3. $\forall a \in K$ $(|a| = |-a|)$.
4. $\forall a \in K$ $(|a| \succeq a \wedge |a| \succeq -a)$.
5. $\forall a, b \in K$ $(|a| + |b| \succeq |a + b|$.
6. $\forall a, b \in K$ $(|a \cdot b| = |a| \cdot |b|)$.
7. $\forall a, b \in K$ $(b \succeq |a| \Leftrightarrow b \succeq a \succeq -b)$.
8. $\forall a \in K\ \forall b \in K\ \forall k \in K\ \forall l \in K$ $(k \succeq a \succeq l \wedge k \succeq b \succeq l \Rightarrow$ $k - l \succeq |a - b|)$.

(тут відношення $\succeq$ – відношення нестрогого порядку).

• Доведемо кілька властивостей. Властивість 4. За означенням $|a| = \max(a, -a)$. Якщо $a \succ -a$, то $|a| = a \wedge a \succeq a$. Отже, $|a| \succeq a$. Якщо ж $-a \succ a$, то $|a| = -a \wedge -a \succeq -a$. Отже, $|a| \succeq -a$. Властивість 5. За властивістю 4 маємо: $|a| \succeq a \wedge |b| \succeq b$. Тоді $|a| + |b| \succeq a + b$ (*). Аналогічно, $|a| \succeq -a \wedge |b| \succeq -b$ і тоді $|a| + |b| \succeq -a + (-b) = -(a + b)$ (**). Оскільки $|a + b| = a + b$ або $|a + b| = -(a + b)$, то з (*) і (**) слідує доведення властивості 5. ■

2. Критерій можливості впорядкування кільця (поля)

Теорема 1.11 (критерій порядку). Кільце (K, +, $\cdot$, 0) можна впорядкувати тоді і тільки тоді, коли множина K містить підмножину K^+, яка задовольняє умови:

1) $\forall a \in K$ $(a \in K^+ \Rightarrow a \neq 0 \wedge -a \,\overline{\in}\, K^+)$;

2) $\forall a \in K$ $(a \neq 0 \Rightarrow a \in K^+ \vee -a \in K^+)$;

3) $\forall a \in K^+$ $\forall b \in K^+$ $(a + b \in K^+ \wedge a \cdot b \in K^+)$.

3. Критерій однозначності порядку

Теорема 1.12 (критерій однозначності порядку). Нехай K^+ і K^{++} – додатні частини кільця (K, +, $\cdot$, 0). Тоді $K^+ = K^{++} \Leftrightarrow K^+ \subseteq K^{++}$.

• Доведення. 1) Нехай $K^+ = K^{++}$. Тоді за теоремою 1.1 $K^+ \subseteq K^{++}$.

2) Нехай $K^+ \subseteq K^{++}$. Розглянемо $\forall a \in K^{++}$. Припустимо, що $a \notin K^+$. Оскільки $a \neq 0$, то $-a \in K^+$. Враховуючи, що $K^+ \subseteq K^{++}$, маємо, що $-a \in K^{++}$. Але це суперечить тому, що $a \in K^{++}$. Отже, припущення неправильне і $a \in K^+$. Тоді $K^{++} \subseteq K^+$. Тоді за теоремою 1.1 $K^+ = K^{++}$. ■

Отже, щоб ввести відношення порядку в кільці (K, +, $\cdot$, 0), треба знайти його додатну частину K^+. Якщо такої додатної частини не існує, то кільце впорядкувати неможливо. Якщо ж в кільці можна знайти кілька додатних частин, то його можна впорядкувати кількома різними способами.

4. Критерій можливості продовження порядку

<u>Означення 1.46</u>. Нехай (K_1, +, $\cdot$, $\succ_1$), (K_2, +, $\cdot$, $\succ_2$) – упорядковані півкільця, причому півкільце K_2 є розширенням півкільця K_1. Порядок $\succ_2$ в K_2 називають продовженням порядку $\succ_1$ в K_1, якщо виконується умова

$$\forall a \in K_1 \ \forall b \in K_1 \ (a \succ_1 b \Leftrightarrow a \succ_2 b).$$

Теорема 1.13 (критерій продовження порядку). Нехай (K_1, $+$, $\cdot$, $\succ_1$), (K_2, $+$, $\cdot$, $\succ_2$) – упорядковані кільця, причому кільце K_2 є розширенням кільця K_1. Якщо множина K_1^+ – множина додатних елементів кільця K_1, а K_2^+ – кільця K_2, то порядок $\succ_2$ є продовженням порядку $\succ_1$ тоді і тільки тоді, коли $K_1^+ \subseteq K_2^+$.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОТРОЛЮ

1. Сформулюйте означення абсолютної величини елемента упорядкованого кільця.
2. Доведіть властивості абсолютної величини елемента упорядкованого кільця.
3. Запишіть властивості абсолютної величини елемента упорядкованого кільця цілих чисел $(Z,+,\cdot,>)$.
4. Сформулюйте критерій порядку.
5. Сформулюйте критерій однозначності порядку.
6. Сформулюйте критерій можливості продовження порядку.

Запитання до колоквіуму
«Змістовий модуль 1. Основні поняття»

1. Поняття множини. Способи задання множин. Приклади.
2. Об’єднання множин: означення, властивості, приклади.
3. Поняття підмножини. Основні властивості, приклади.
4. Перетин множин: означення, властивості, приклади.
5. Різниця множин: означення, властивості, приклади.
6. Декартів добуток множин: означення, властивості, приклади.
7. Бінарне відношення. Означення, приклади, властивості.
8. Відношення порядку. Означення, властивості, приклади.
9. Відношення еквівалентності. Означення, властивості, приклади.
10. Поняття унарної алгебраїчної операції. Приклади.
11. Поняття бінарної алгебраїчної операції, властивості, які слідують з означення.
12. Комутативні алгебраїчні операції: означення, приклади.
13. Асоціативні алгебраїчні операції: означення приклади.
14. Дистрибутивні алгебраїчні операції: означення, приклади.
15. Група, півгрупа: означення, приклади, основні властивості.
16. Кільце, півкільце: : означення, приклади, основні властивості.
17. Поле: : означення, приклади, основні властивості.
18. Комутативне кільце з одиницею: : означення, приклади, основні властивості.
19. Тіло: : означення, приклади, основні властивості.
20. Упорядкована група (півгрупа): означення, приклади, основні властивості.
21. Упорядковане кільце: означення, приклади, основні властивості.
22. Упорядковане поле: означення, приклади, основні властивості.
23. Абсолютна величина. Основні властивості.
24. Критерій можливості упорядкування кільця.
25. Критерій однозначності порядку.
26. Критерій можливості продовження порядку.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2.
МНОЖИНА НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

Тема 2.1. Означення системи натуральних чисел

1. **Означення системи натуральних чисел**
2. **Принцип і метод математичної індукції**
3. **Властивості натуральних чисел, які слідують із означення**

1. Означення системи натуральних чисел

<u>*Означення 2.1.*</u> Нехай множина $N \neq \varnothing$, у множині N введено унарне відношення «безпосередньо слідувати за» – «$'$». Множину N називають множиною натуральних чисел, а її елементи натуральними числами, якщо виконуються умови:

А1. У множині N є елемент, який не слідує ні за яким іншим натуральним числом. Позначати будемо 1.

А2. Яке б не було натуральне число a, завжди існує одне і тільки одне натуральне число a', яке безпосередньо слідує за a:

$$(\forall a \in N \ \exists! a' \in N).$$

А3. Яке б не було натуральне число $a \neq 1$, завжди існує одне і тільки одне натуральне число, за яким a безпосередньо слідує:

$$\forall a \in N \wedge a \neq 1 \ \exists! b \in N \wedge b' = a .$$

А4. Для будь-яких натуральних чисел із рівності елементів, які безпосередньо слідують за числами a та b, слідує рівність самих чисел a та b:

$$\forall a, b \in N \ (a' = b' \Rightarrow a = b).$$

А5 (аксіома індукції). Якщо підмножина M множини натуральних чисел має дві властивості: 1) містить одиницю; 2) якщо вона містить яке-небудь натуральне число a, то вона містить і безпосередньо наступне за ним натуральне число a', то дана множина M збігається з множиною натуральних чисел:

$$(M \subset N \wedge 1 \in M \wedge (\forall a \in M \Rightarrow a' \in M)) \Rightarrow M = N .$$

Це аксіоматичне означення множини натуральних чисел. Аксіоми А1 – А5 називають аксіомами Пеано.

Число a називають попереднім для числа a', а число a' наступним для числа a.

У означенні натуральних чисел нічого не вказується про природу елементів множини N. Отже, ця природа може бути довільною. Історично склалося, що найпоширенішою стала модель натуральних чисел, яку записуємо у вигляді послідовності чисел: 1, 2, …, 10, 11, …. Але можна розглянути й інші моделі.

✍ <u>Приклад 2.1.</u> Розглянемо набір множин, в якому множина $\{|\}$ є початковим елементом, а кожну наступну множину одержуємо приписуванням ще однієї вертикальної риски: $\{|\}$, $\{||\}$, $\{|||\}$, . Будемо вважати, що множина N складається з множин описаного виду. Тоді на такій множині для відношення «безпосередньо слідувати за» виконуються аксіоми Пеано. Отже, цю множину можна вважати моделлю системи натуральних чисел.

2. Принцип і метод математичної індукції

Принцип математичної індукції – це інша форма аксіоми індукції: якщо твердження $P(n)$, де n – натуральне число, істинне для $n = 1$, і з того, що воно істинне для $n = k$, де k – будь-яке натуральне число, $k > 1$, слідує його істинність для безпосередньо наступного числа $n = k'$, то це твердження істинне для будь-якого натурального числа n.

На принципі математичної індукції ґрунтується **метод математичної індукції (метод МІ).** Доведення методом математичної індукції складається з чотирьох етапів:

1) База індукції. Перевіряємо, що для $n = 1$ твердження $P(n)$ правильне.

2) Гіпотеза індукції. Припускаємо, що твердження $P(n)$ правильне для $n = k$.

3) Крок індукції. Доводимо, що твердження $P(n)$ буде істинним і для безпосередньо наступного $n = k'$ (для цього обов'язково використовуємо гіпотезу індукції);

4) На основі принципу математичної індукції робимо висновок, що твердження $P(n)$ істинне для будь-якого натурального числа n.

✍ Приклад 2.2. Доведіть, що $\forall n \in N\ (10^n - 4^n + 3n) \vdots 9$.

○ Доведення. Оскільки твердження стосується множини натуральних чисел, то доводитимемо методом математичної індукції.

1) База індукції. Перевіримо, що для $n = 1$ твердження є істинним: $10^1 - 4^1 + 3 = 10 - 4 + 3 = 9 \vdots 9$ – істинне.

2) Гіпотеза індукції. Припустимо, що задане твердження істинне для $n = k$: $(10^k - 4^k + 3k) \vdots 9$ – істинне.

3) Крок індукції. Доведемо, що задане твердження буде істинним і для безпосередньо наступного $n = k'$: $(10^{k'} - 4^{k'} + 3k') \vdots 9$ – довести.

Доведення1. $k' = k + 1$. $10^{k'} - 4^{k'} + 3k' = 10^{k+1} - 4^{k+1} + 3(k+1)$. Перетворимо вираз так, щоб виокремити доданок $(10^k - 4^k + 3k)$. $10^{k+1} - 4^{k+1} + 3(k+1) = 10^k \cdot 10 - 4^k \cdot 4 + 3k + 3 = 10^k - 4^k + 3k + 10^k \cdot 9 - {}$ ${}-4^k \cdot 3 + 3$. Вираз $10^k - 4^k + 3k$ кратний 9 за припущенням (гіпотеза індукції), $10^k \cdot 9$ кратний 9, бо один із множників дорівнює 9. Доведемо, що вираз $-4^k \cdot 3 + 3$ кратний 9, або, що те саме, вираз $4^k - 1$ кратний 3. Ще раз застосуємо метод МІ.

Доведення1.1. 1.1) База індукції. Перевіримо, що для $k = 1$ твердження є істинним: $4^1 - 1 = 3 \vdots 3$ – істинне.

2.1) Гіпотеза індукції. Припустимо, що задане твердження істинне для $k = m$, $m > 1$: $(4^m - 1) \vdots 3$ – істинне.

3.1) Крок індукції. Доведемо, що задане твердження буде істинним і для безпосередньо наступного $k = m'$: $(4^{m'} - 1) \vdots 3$ –

довести.

$4^{m'}-1=4^{m+1}-1=4^{m}\cdot 4-1=4^{m}+4^{m}\cdot 3-1=(4^{m}-1)+4^{m}\cdot 3$.

Перший доданок $(4^{m}-1)$ кратний 3 за гіпотезою індукції, другий доданок $4^{m}\cdot 3$ кратний 3, бо один із множників дорівнює 3. Тому $(4^{m'}-1)\vdots 3$.

4.1) На основі принципу математичної індукції робимо висновок, що твердження $(4^{k}-1)\vdots 3$ істинне для будь-якого натурального числа *k*.

Довели, що вираз $-4^{k}\cdot 3+3$ кратний 9. Тоді $(10^{k'}-4^{k'}+3k')\vdots 9$ як сума трьох доданків, кожен з яких кратний 9.

4) На основі принципу математичної індукції робимо висновок, що твердження $(10^{n}-4^{n}+3n)\vdots 9$ істинне для будь-якого натурального числа n.

Метод МІ використовується й тоді, коли твердження виконується не для всіх натуральних чисел, а починаючи з якогось n_0. Тоді істинність твердження перевіряється не для $n = 1$, а для $n = n_0$.

✍ Приклад 2.3. Доведіть, що $\forall n\in N\wedge n\geq 5\,(2^{n}>n^{2})$.

○ Доведення. Застосуємо метод МІ.

1) База індукції. Перевіримо, що для $n = 5$ задана нерівність істинна. Ліва частина буде $2^{5}=32$, права $5^{2}=25$. $32 > 25$ – істина.

2) Гіпотеза індукції. Припустимо, що задана нерівність істинна для $n = k$, $k > 5$: $2^{k}>k^{2}$ – істина.

3) Крок індукції. Доведемо, що задана нерівність буде істинною і для безпосередньо наступного $n = k'$, тобто, доведемо, що $2^{k'}>(k')^{2}$, $k' > 5$.

Доведення. $2^{k'}=2^{k+1}=\underline{2^{k}}\cdot 2>\underline{k^{2}}\cdot 2=k^{2}+\underline{\underline{k^{2}}}>k^{2}+\underline{\underline{\underline{2k+1}}}=$ $=(k+1)^{2}=(k')^{2}$. Отже, $2^{k'}>(k')^{2}$ для $k' > 5$. Обґрунтуємо, що $k^{2}>2k+1$ для $k > 5$. Дійсно, $k^{2}-2k-1=k^{2}-2k+1-2=(k+1)^{2}-$

$-2 > 36-2 = 34 > 0$. Тоді $k^2 > 2k+1$ для $k > 5$.

4) На основі принципу математичної індукції робимо висновок, що нерівність $2^n > n^2$ істинна для будь-якого натурального числа $n \geq 5$.

3. Властивості натуральних чисел, які слідують із означення

З аксіом Пеано слідує низка властивостей натуральних чисел.

1. Якщо не рівні наступні, то не рівні попередні
$$(\forall a, b \in N\ (a' \neq b' \Rightarrow a \neq b).$$
2. Якщо не рівні попередні, то нерівні наступні
$$\forall a, b \in N\ (a \neq b \Rightarrow a' \neq b').$$
3. Натуральне число ніколи не дорівнює наступному
$$\forall a \in N\ (a \neq a').$$

• Доведемо першу властивість. Припустимо, що $a' \neq b'$, але $a = b$. Тоді за А2 маємо, що $a' = b'$, а це суперечить умові. Властивість доведена.

Доведемо другу властивість. Припустимо, що $a \neq b$, але $a' = b'$. Тоді за А4 $a = b$. Прийшли до суперечності. Отже, припущення неправильне і властивість доведена. ■

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОТРОЛЮ

1. Сформулюйте означення системи натуральних чисел.
2. Обґрунтуйте виконання аксіом Пеано у Прикладі 2.1.
3. Побудуйте модель системи натуральних чисел.
4. Сформулюйте аксіому індукції.
5. Сформулюйте принцип математичної індукції.
6. Вкажіть схему доведення методом МІ. Вкажіть теоретичну основу методу МІ.
7. Для доведення яких тверджень застосовується метод МІ?
8. Як можна узагальнити схему доведення методом МІ? Чи можна схему доведення методом МІ вважати алгоритмом? Чому?
9. На місці пропусків впишіть відповідні слова:

   1) База індукції. ________, що для $n = 1$ твердження $P(n)$ правильне.

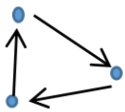
   2) Гіпотеза індукції. ________, що твердження $P(n)$ правильне для $n = k$.

3) ______ індукції. ______ , що твердження $P(n)$ буде істинним і для безпосередньо наступного $n = k'$ (для цього обов'язково використовуємо гіпотезу індукції);

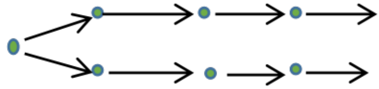
4) На основі ______ математичної індукції робимо висновок, що твердження $P(n)$ істинне для будь-якого натурального числа n.

10. Вкажіть властивості натуральних чисел, які слідують з аксіом. Доведіть їх.

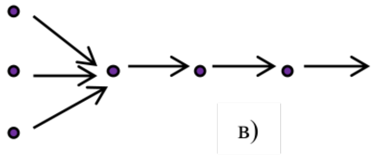
11. На рисунку 2.1 (а) – в)) елементи множини N зображено точками, а відношення «безпосередньо слідувати за» - стрілками. Чи можуть ці множини бути моделями системи натуральних чисел? Відповідь обґрунтуйте.



а)



б)



в)

Тема 2.2. Додавання та множення натуральних чисел

1. **Додавання натуральних чисел. Властивості додавання**
2. **Множення натуральних чисел. Властивості множення**

1. Додавання натуральних чисел. Властивості додавання

Означення 2.2. Додаванням натуральних чисел називається бінарна операція (якщо вона існує), яка кожній парі натуральних чисел (a; b) ставить у відповідність натуральне число c, яке називається їхньою сумою, *позначається* $c = a + b$, і має такі властивості:

A1) $\forall a \in N\ a+1=a'$.

A2) $\forall a,b \in N\ a+b'=(a+b)'$.

Числа a та b називають доданками. Властивості, вказані в означенні 2.2, називають аксіомами додавання.

Чи буде операція додавання натуральних чисел алгебраїчною на множині N?

Теорема 2.1 (про існування і єдиність суми). Додавання натуральних чисел існує і воно єдине.

$\bullet$ Доведення. 1) Доведемо існування суми, тобто доведемо, що для кожного натурального числа a існує відповідність $N \to N$, яка кожному b співставляє число $a + b$, і ця відповідність задовольняє аксіоми додавання. Нехай M – множина тих чисел a, для яких така відповідність існує (можливо, ця множина й порожня). Доведемо, що $1 \in M$. Для цього вважатимемо, що

$$\forall b \in M\ 1+b=b'. \qquad (*)$$

Перевіримо виконання аксіом додавання.

A1) $1 + 1 = 1'$ (за рівністю (*)), тобто для $a = 1$ виконується рівність $a+1=a'$.

A2) $1+b'=(b')'=(1+b)'$ (за рівністю (*)), тобто для $a = 1$ виконується рівність $a+b'=(a+b)'$.

Отже, $1 \in M$.

Припустимо, що $a \in M$, і доведемо, що $a' \in M$. Покладемо, що $\forall b \in M\ a' + b = (a+b)'$ (**). Зауважимо, що число $a+b$ визначено, тому й число $(a+b)'$ визначено за другою аксіомою Пеано. Перевіримо виконання аксіом додавання.

А1) $a' + 1 \overset{(**)}{=} (a+1)' \overset{a \in M}{=} (a')'$, тобто для a' перша аксіома додавання виконується.

А2) $a' + b' \overset{(**)}{=} (a+b')' \overset{a \in M}{=} ((a+b)')' \overset{(**)}{=} (a'+b)'$, тобто для a' друга аксіома додавання також виконується.

Таким чином, доведено, що $1 \in M \wedge (\forall a \in M \Rightarrow a' \in M)$. Отже, за аксіомою індукції $M = N$. Отже, існує правило, за яким для будь-яких натуральних чисел a та b співставляється натуральне число $a + b$ і виконуються аксіоми додавання. Існування додавання доведено.

2) Доведемо єдиність суми. Припустимо, що для довільно вибраного a є дві відповідності, які задовольняють аксіоми додавання: $b \to a + b$ і $b \to a \oplus b$. Позначимо $M = \{b \in N \mid a + b = a \oplus b\}$. Тоді:

1) за першою аксіомою додавання $a + 1 = a'$, $a \oplus 1 = a'$, тому $a + 1 = a \oplus 1$, тобто $1 \in M$;

2) припустимо, що $b \in M$, і доведемо, що $b' \in M$. $b \in M \Rightarrow a + b = a \oplus b$. Тоді $a + b' \overset{A2}{=} (a+b)' \overset{a,b \in M}{=} (a \oplus b)' \overset{A2}{=} a \oplus b'$, тобто $b' \in M$.

За аксіомою індукції $M = N$, тобто $\forall b \in N\ a + b = a \oplus b$, і єдиність додавання встановлена для будь-якого b і довільно вибраного a, тобто вона встановлена для всіх натуральних чисел a і b. ■

Отже, операція додавання є алгебраїчною на множині натуральних чисел.

Домовимося про такі *позначення*: $1' = 2,\ 2' = 3,\ 3' = 4, \cdots$

✍ <u>Приклад 2.4.</u> 1) Покажемо, як знайти суму натуральних чисел 5 і 1. $5+1=5'$ – за першою аксіомою додавання. За введеними позначеннями $5'=6$. Отже, $5+1=5'=6$.

2) Покажемо, як знайти суму натуральних чисел 5 і 2. $5+2=5+1'=(5+1)'=(5')'=6'=7$. Тут використано позначення, друга аксіома додавання, знов позначення.

3) Покажемо, як знайти суму натуральних чисел 5 і 3. $5+3=5+2'=(5+2)'=(5+1')'=((5+1)')'=((5')')'=(6')'=7'=8$.

Теорема 2.2 (асоціативний (сполучний) закон додавання).

$$\forall a,b,c\in N\ a+(b+c)=(a+b)+c$$

$\bullet$Доведення. Зафіксуємо довільні натуральні числа a та b і проведемо доведення індукцією за c.

Нехай $M=\{c\in N\mid a+(b+c)=(a+b)+c\}$ Тоді:

1) $(a+b)+1\overset{A1}{=}(a+b)'\overset{A2}{=}a+b'\overset{A1}{=}a+(b+1)$, тобто $1\in M$;

2) нехай $c\in M$, тобто $a+(b+c)=(a+b)+c$. Доведемо, що $c'\in M$.

$(a+\ b)+c'\overset{A2}{=}((a+b)+c)'\overset{c\in M}{=}(a+(b+c))'\overset{A2}{=}a+(b+c)'\overset{A2}{=}a+(b+c')$,

тобто $c'\in M$. За аксіомою індукції $M = N$, тобто для фіксованих a та b рівність $a+(b+c)=(a+b)+c$ доведена для всіх c. Оскільки a та b вибрано довільно, то теорема доведена. ■

Теорема 2.3 (комутативний (переставний) закон додавання).

$$\forall a,b\in N\ (a+b=b+a).$$

$\bullet$Доведення. I) Доведемо спочатку комутативний закон додавання для $b=1$, тобто, $\forall a\in N\ (a+1=1+a)$. Нехай $M=\{a\in N\mid a+1=1+a\}$. Тоді:

1) очевидно, що $1\in M$;

2) нехай $a\in M$, тобто $a+1=1+a$. Покажемо, що $a'\in M$.

$a'+1\overset{A1}{=}(a+1)+1\overset{a\in M}{=}(1+a)+1\overset{T2.2}{=}1+(a+1)\overset{A1}{=}1+a'$, тобто $a'\in M$.

II) Тепер виберемо довільне $a \in N$ і доведемо теорему індукцією за b. Нехай $M = \{b \in N \mid a+b = b+a\}$. Тоді:

1) за доведеним $1 \in M$;

2) нехай $b \in M$, тобто $a+b=b+a$. Покажемо, що $b' \in M$.

$$a+b' \overset{A2}{=} (a+b)' \overset{b\in M}{=} (b+a)' \overset{A2}{=} b+a' \overset{A1}{=} b+(a+1) \overset{I)}{=} b+(1+a) =$$

$$\overset{T2.2}{=} (b+1)+a \overset{A1}{=} b'+a$$, тобто $b' \in M$. За аксіомою індукції $M = N$ і теорема доведена. ■

2. Множення натуральних чисел. Властивості множення

<u>*Означення 2.3.*</u> Множенням натуральних чисел називається бінарна операція (якщо вона існує), яка кожній парі натуральних чисел (a; b) ставить у відповідність натуральне число c, яке називається їхнім добутком, *позначається* $c = a \cdot b$, і має такі властивості:

A1) $\forall a \in N \ a \cdot 1 = a$.

A2) $\forall a, b \in N \ a \cdot b' = a \cdot b + a$.

Числа a та b називають множниками. Властивості, вказані в означенні 2.3, називають аксіомами множення.

✍ <u>Приклад 2.5.</u> 1) Покажемо, як знайти добуток натуральних чисел 5 і 1. $5 \cdot 1 = 5$ – за першою аксіомою множення.

2) Покажемо, як знайти добуток натуральних чисел 5 і 2. $5 \cdot 2 = 5 \cdot 1' = 5 \cdot 1 + 5 = 5 + 5 = 10$. Тут використано позначення, друга аксіома множення, перша аксіома множення, таблиця додавання.

3) Покажемо, як знайти добуток натуральних чисел 5 і 3. $5 \cdot 3 = 5 \cdot 2' = 5 \cdot 2 + 5 = 5 \cdot 1' + 5 = (5 \cdot 1 + 5) + 5 = (5+5) + 5 = 10 + 5 = 15$.

Чи буде операція множення натуральних чисел алгебраїчною на множині N?

Теорема 2.4 (про існування та єдиність добутку). Множення натуральних чисел існує і єдине.

• Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми про існування і єдиність суми. ■

Теорема 2.5 (правий дистрибутивний (розподільний) закон множення відносно додавання).

$$\forall a,b,c \in N \ \left(\left(a+\ b\right)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c\right).$$

$\bullet$ Доведення. Виберемо довільні $a,b \in N$ і застосуємо індукцію за c. Нехай $M = \{c \in N \mid \left(a+\ b\right)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c\}$. Тоді:

1) за першою аксіомою множення $\left(a+\ b\right)\cdot 1 = a+\ b$; з іншого боку, за першою аксіомою множення $a\cdot 1 + b\cdot 1 = a+b$. Отже, $\left(a+\ b\right)\cdot 1 = a\cdot 1 + b\cdot 1$ і $1 \in M$;

2) нехай $c \in M$, тобто $\left(a+\ b\right)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$. Покажемо, що $c' \in M$. Використовуючи другу аксіому множення та закони додавання маємо:

$\left(a+\ b\right)\cdot c' = \left(a+\ b\right)\cdot c + \left(a+b\right) = (a\cdot c + b\cdot c) + (a+b) = (a\cdot c + a) +$

$+(b\cdot c + b) = a\cdot c' + b\cdot c'$, отже, $c' \in M$. За аксіомою індукції $M = N$ і теорема доведена. ■

Теорема 2.6 (комутативний (переставний) закон множення).

$$\forall a,b \in N\left(a\cdot b = b\cdot a\right).$$

$\bullet$Доведення теореми аналогічне доведенню комутативного закону додавання. ■

Теорема 2.7 (лівий дистрибутивний закон множення відносно додавання). $\forall a,b,c \in N \ \left(c\cdot\left(a+\ b\right) = c\cdot a + c\cdot b\right)\cdot b$).

$\bullet$Доведення слідує із двох попередніх теорем. ■

Теорема 2.8 (асоціативний закон множення).

$$\forall a,b,c \in N \ a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$$

$\bullet$ Доведення теореми аналогічне доведенню асоціативного закону додавання. ■

Закони множення та додавання поширюються на довільну скінчену кількість доданків і множників.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОТРОЛЮ

1. Сформулюйте означення додавання двох натуральних чисел.
2. Як називаються компоненти й результат операції додавання?

3. Чи є операція додавання алгебраїчною на множині натуральних чисел? Відповідь обґрунтуйте.

4. Сформулюйте асоціативний закон додавання. Які перетворення виразів можна здійснювати на основі цього закону?

5. Сформулюйте комутативний закон додавання. Які перетворення виразів можна здійснювати на основі цього закону?

6. Використовуючи означення додавання, закони додавання, знайдіть значення виразів: а) 6 + 3; б) 2 + 17.

7. Сформулюйте означення множення двох натуральних чисел.

8. Як називаються компоненти й результат операції множення?

9. Чи є операція множення алгебраїчною на множині натуральних чисел? Відповідь обґрунтуйте.

10. Сформулюйте асоціативний закон множення. Які перетворення виразів можна здійснювати на основі цього закону?

11. Сформулюйте комутативний закон множення. Які перетворення виразів можна здійснювати на основі цього закону?

12. Сформулюйте лівий дистрибутивний закон множення відносно додавання. Сформулюйте правий дистрибутивний закон множення відносно додавання. Які перетворення виразів можна здійснювати на основі цих законів?

13. Використовуючи означення множення, закони множення, знайдіть значення виразів: а) $6 \cdot 3$; б) $2 \cdot 17$.

14. Усно обчисліть значення виразів. Відповідь обґрунтуйте:
а) $23457 \cdot 6 + 23457 \cdot 4$; б) $911968 \cdot 54 + 46 \cdot 911968$; в) $7041967 + 9 \cdot 7041967$.

15. Запишіть вираз, для усного обчислення значення якого треба застосувати комутативний і асоціативний закони додавання.

16. Запишіть вираз, для усного обчислення значення якого треба застосувати комутативний і асоціативний закони множення.

Тема 2.3. Відношення порядку на множині натуральних чисел

1. **Допоміжні твердження**
2. **Основні означення. Властивості нерівностей**
3. **Розширений натуральний ряд**

1. Допоміжні твердження

Теорема 2.9. Сума будь-яких двох натуральних не може дорівнювати одному з доданків: $\forall a,b \in N\ \left(a+b \neq b\right)$

$\bullet$ Доведення. Теорему доведемо індукцією за b для довільного натурального a. Нехай $M=\{b\in N \mid a+b\neq b\}$. Тоді:

1) $a+1=a'\neq 1$, тобто, $1\in M$;

2) нехай $b\in M$, тобто $a+b\neq b$. Тоді $(a+\ b)'\neq b'$, з другого боку, $(a+b)'=a+b'$, отже, $a+b'\neq b'$, тобто $b'\in M$. За аксіомою індукції $M=N$ і теорема доведена. ■

Теорема 2.10. Для довільних натуральних чисел a та b має місце один і тільки один з таких випадків:

$$\text{I. } a=b\textbf{;}\ \text{II. } \exists k\in N\left(a=b+k\right);\ \text{III. } \exists l\in N\left(b=a+l\right).$$

$\bullet$ Доведення. Встановимо, що випадки попарно несумісні. Справді, I і II не можуть відбуватися одночасно, бо $(a=b)\wedge \left(a=b+k\right)\Rightarrow(b=b+k)$, що суперечить попередній теоремі; аналогічно, I і III несумісні. Якби мали місце II і III, то $\left(a=b+k\right)\wedge\left(b=a+l\right)\Rightarrow(a=(a+l)+k)\Rightarrow(a=a+(l+k))$, що також суперечить попередній теоремі.

Покажемо індукцією за b, що один із зазначених випадків завжди має місце. Нехай вибране довільне $\exists a\in N$, а множина M – множина тих $b\in N$, для кожного з яких для цього a можливий випадок I, II або III:

1) якщо a = 1, то для b = 1 маємо $a=b$ (випадок I). Якщо ж $a\neq 1$, то $\exists k\in N\ (k'=k+1=a)$, тобто для b = 1 маємо випадок II. Отже, $1\in M$.

2) Нехай тепер $b \in M$, тобто справедливий один із трьох випадків для b. Покажемо, що і для b' матимемо місце один з зазначених трьох випадків. Нехай для b справджується випадок I. Тоді $a = b \Rightarrow \; a' = a + 1 = b'$, тобто для b' маємо випадок III. Якщо для b справджується випадок II, то для $k = 1$ матимемо випадок I для b', бо $a = b + 1 = b'$. Якщо ж $k \neq 1$, то $\exists c \in N \; (c' = c + 1 = k)$ і маємо: $a = b + k = b + \left(c + 1\right) = b + \left(1 + c\right) =$ $= \left(b + 1\right) + c = b' + c$, тобто для b' маємо випадок II. Нехай для b справджується випадок III. Тоді $(b = a + l) \Rightarrow (b' = (a + l)' = a + l')$, тобто для b' маємо випадок III. Отже, $b' \in M$. За аксіомою індукції $M = N$ і теорема доведена. ■

2. Основні означення. Властивості нерівностей

Означення 2.4. Про натуральні числа a і b кажуть, що «a більше b» або «b менше a», і відповідно *позначають* $a > b$ або $b < a$ тоді і тільки тоді, коли $\exists c \in N \; (a = b + c)$.

✍ Приклад 2.6. Число 13 більше 5, бо існує таке число $8 \in N$, що $13 = 5 + 8$.

Означення 2.5. Про натуральні числа a і b кажуть, що «a більше або дорівнює b» або «b менше або дорівнює a», і відповідно *позначають* $a \geq b$ або $b \leq a$ тоді і тільки тоді, коли $\overline{b > a}$.

Вираз $a > b \wedge b > c$ *позначають*: $a > b > c$. Аналогічні *позначення* мають місце для відношень ≥, ≤.

Означення 2.6. Нехай $M \subset N$. Число $n \in M$ називають найменшим елементом множини M, якщо $\forall x \in M \Rightarrow x \geq n$.

Аналогічно вводиться поняття найбільшого елемента множини.

Множина натуральних чисел має найменший елемент – він дорівнює 1, не має найбільшого елемента.

Розглянемо основні властивості відношення > у множині натуральних чисел.

Теорема 2.11 (зв'язність). $\forall a, b \in N \; (a = b \vee a > b \vee b > a)$.

$\bullet$Доведення. За теоремою 2.10 для довільних натуральних чисел a та b має місце один і тільки один з таких випадків:

$$\text{I. } a=b\text{; II. } \exists k\in N\left(a=b+k\right)\text{; III. } \exists l\in N\left(b=a+l\right).$$

Враховуючи означення 2.4, ці випадки можна переписати так:

$$\text{I. } a=b\text{; II. } a>b\text{; III. } b>a \ \blacksquare$$

Теорема 2.12 (антирефлексивність). $\forall a\in N\left(\overline{a>a}\right)$.

$\bullet$Доведення. Припустимо, що $\exists a\in N\,(a>a)$. Тоді, за означенням 2.4, $\exists c\in N\ (a=a+c)$,що суперечить теоремі 2.9. Отже, припущення неправильне і $\forall a\in N\left(\overline{a>a}\right)$.$\blacksquare$

Теорема 2.13 (несиметричність). $\forall a,b\in N\ (a>b\Rightarrow\overline{b>a})$.

$\bullet$Доведення. Припустимо, що $\exists a,b\in N\ (a>b\Rightarrow b>a)$. Тоді $(a>b\wedge b>a)\Rightarrow(a=b+k\wedge b=a+l)\Rightarrow a=(a+l)+k\Rightarrow a=a+(l+k)$ – протиріччя до теореми 2.9. Отже, припущення неправильне і $\forall a,b\in N\ (a>b\Rightarrow\overline{b>a})$$\blacksquare$

Теорема 2.14 (транзитивність).

$$\forall a,b,c\in N\,((a>b\wedge b>c)\Rightarrow a>c).$$

$\bullet$Доведення.

$$(a>b\wedge b>c)\Rightarrow(a=b+k\wedge b=c+l)\Rightarrow\left(a=c+\left(l+k\right)\right)\Rightarrow a>c.$$

Отже, відношення > (аналогічно <) є відношенням *строгого лінійного порядку*. Тому множина *N* натуральних чисел є лінійно і строго впорядкована множина. *Позначення*: (*N*, >).

Теорема 2.15 (монотонність відносно додавання).

$$\forall a,b,c\in N\,(a>b\Rightarrow a+c>b+c).$$

$\bullet$Доведення.

$$a>b\Rightarrow a=b+k\Rightarrow\underline{a+c}=(b+k)+c=b+(k+c)=b+(c+k)\underline{=(b+c)+k}\ .$$

Із підкресленого слідує, що $a+c>b+c$. $\blacksquare$

Теорема 2.16 (монотонність відносно множення).

$$\forall a,b,c\in N\,(a>b\Rightarrow a\cdot c>b\cdot c)$$

$\bullet$Доводиться аналогічно. $\blacksquare$

Теорема 2.17 $\forall a,b \in N\ (a+b \neq 1)$.

$\bullet$ Доведення. Застосуємо аксіому індукції. Для фіксованого довільного a розглянемо $M = \{b \in N \mid a+b \neq 1\}$. Тоді:

1) $1 \in M$ за першою аксіомою Пеано.

2) Нехай $b \in M$, тобто $a+b \neq 1$. Маємо: $a+b' = (a+b)' = (a+b)+1 \neq 1$, тобто $b' \in M$. За аксіомою індукції $M = N$ і теорема доведена. ■

Означення 2.7. Множину натуральних чисел N, упорядковану за введеним відношенням порядку $>$, називають натуральним рядом.

Початок натурального ряду можна записати так: $1, 1', 1'', \ldots$. або, враховуючи позначення $1' = 2, 2' = 3, 3' = 4, \cdots$, у звичному вигляді: 1, 2, 3, ….

3. Розширений натуральний ряд

Ввівши у побудованій множині натуральних чисел відношення порядку, отримали натуральний ряд, який позначили $(N, >)$.

Розширимо натуральний ряд $(N, >)$, увівши нове число 0. Множину, утворену приєднанням 0 до множини натуральних чисел, позначимо через N_0 і назвемо множиною цілих невід’ємних чисел.

Означення 2.8. Назвемо числом нуль (позначимо 0) елемент, який має такі властивості:

1) 0'=1;

2) $\forall a \in N_0\ \ (a+0 = 0+a = a)$;

3) $\forall a \in N_0\ \ (a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0)$;

4) $\forall a,b \in N_0\ (a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0)$.

У множині N_0 справджуються комутативний і асоціативний закони додавання і множення, дистрибутивний закон множення відносно додавання.

Розширений натуральний ряд *позначимо* через (N_0, $>$).

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОТРОЛЮ

1. Доведіть, що $\forall a, b \in N \ (a + b \neq a)$.
2. Сформулюйте означення відношення $>$ у множині натуральних чисел.
3. Обґрунтуйте, що відношення $>$ у множині натуральних чисел є відношенням строгого лінійного порядку.
4. Обґрунтуйте, що число 1 є найменшим натуральним числом.
5. Обґрунтуйте, що множина натуральних чисел не має найбільшого елемента.
6. Порівняйте означення відношення $>$ у курсі числові системи (означення 2.5) із означенням відношення $>$ у шкільному курсі математики.
7. Сформулюйте твердження, обернене до теореми 2.15. Чи буде воно істинним? Відповідь обґрунтуйте.
8. Сформулюйте твердження, обернене до теореми 2.16. Чи буде воно істинним? Відповідь обґрунтуйте.
9. Обґрунтуйте, що 123 > 119.
10. Які властивості відношення $>$ використовуються учнями ЗЗСО неявно під час розв'язування таких завдань: «Не обчислюючи значення виразів, порівняйте $324 + 3245$ і $324 + 3255$; $324 \cdot 3245$ і $324 \cdot 3255$.

Тема 2.4. Віднімання та ділення натуральних чисел

1. **Віднімання натуральних чисел. Властивості віднімання**
2. **Ділення натуральних чисел. Властивості ділення**
3. **Властивості відношення подільності**
4. **Ознаки подільності суми, різниці, добутку**

1. Віднімання натуральних чисел. Властивості віднімання

Після введення відношення порядку у множині натуральних чисел можна ввести операцію віднімання. Ця операція вводиться як обернена до операції додавання.

Означення 2.9. Відніманням натуральних чисел називається операція, яка числам *a* та *b* $\in N_0$ зіставляє число *c,* яке називається різницею (*позначається* $c = a - b$) і таке, що $b + (a - b) = a$.

У записі $c = a - b$ число a називають зменшуваним, b – від’ємником, c – різницею.

✍ Приклад 2.7. Різниця чисел 8 і 5 дорівнює 3 (8 – 5 = 3), бо $5 + 3 = 5 + 2' = (5 + 2)' = (5 + 1')' = ((5 + 1)')' = ((5')')' = ((6)')' = 7' = 8$.

Операція віднімання не є алгебраїчною операцією на множині N_0, оскільки вона не завжди виконувана. Це буде встановлено в наступній теоремі, яка дає разом з тим умови виконуваності віднімання.

Теорема 2.18. Різниця $a - b, a, b \in N_0$ існує тоді і тільки тоді, коли $a \geq b$. Якщо різниця існує, то вона єдина.

$\bullet$ Доведення. *Необхідність*. Нехай $\exists c = a - b \in N_0$. Тоді за означенням різниці $a = b + c$. Якщо $c = 0$, то $a = b$; якщо ж $c > 0$, то за означенням відношення «$>$» маємо, що $a > b$. Отже, $(a = b \vee a > b) \Rightarrow (a \geq b)$.

Достатність. Нехай $a \geq b$. Тоді є дві можливості: 1) якщо $a = b$, то $a = b + 0$ і за означенням різниці $a - b = 0$, тобто різниця існує; 2) якщо $a > b$, то за означенням відношення «$>$» $\exists c \in N\ a = b + c$, тоді $c = a - b$.

Єдиність. Припустимо, що існують дві різні різниці чисел *a* і *b*: $c_1 = a - b, c_2 = a - b, c_1 \neq c_2$. За означенням різниці маємо: $a = b + c_1, a = b + c_2$, тому $b + c_1 = b + c_2$. Звідси слідує (за теоремою про можливість скорочення), що $c_1 = c_2$, а це протирічить припущенню $c_1 \neq c_2$. Отже, якщо різниця існує, то вона єдина. ■

Сформулюємо і доведемо деякі властивості віднімання (вважаючи, що всі різниці, які будуть записані, існують).

Теорема 2.19. $a - b \leq a,\ a, b \in N_0$.

• Доведення: За означенням різниці з урахуванням комутативного закону додавання $(a - b) + b = a$; тоді: якщо $b = 0$, то $(a - b) = a$, якщо $b > 0$, то за означенням відношення «$>$» $a - b < a$. Тоді $((a - b) = a \wedge a - b < a) \Rightarrow (a - b \leq a)$.■

Теорема 2.20. Має місце дистрибутивний закон множення відносно віднімання: $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c,\ a, b, c \in N_0$.

• Доведення. За дистрибутивним законом множення відносно додавання: $(a - b) \cdot c + b \cdot c = ((a - b) + b) \cdot c = a \cdot c$ (сума в дужках дорівнює *a* за означенням віднімання і врахуванням комутативного закону множення відносно додавання). Отже, $(a - b) \cdot c + b \cdot c = a \cdot c$, тоді за означенням віднімання $\left(a - b\right) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c.$ ■

Теорема 2.21. Мають місце такі властивості віднімання:

а) $a - b = c - d \Leftrightarrow a + d = b + c$;

б) $(a - b) + (c - d) = \left(a + c\right) - (b + d)$;

в) $(a - b) - (c - d) = (a + d) - (b + c)$;

г) $(a - b) \cdot (c - d) = (a \cdot c + b \cdot d) - (a \cdot d + b \cdot c)$;

д) $b < c \Leftrightarrow a - b > a - c$.

• Доведення. Доведемо, наприклад, властивість б). Інші властивості пропонуємо довести самостійно. Використовуючи

асоціативність і комутативність додавання, а також означення віднімання, маємо:
$((a-b)+(c-d))+(b+d)=((a-b)+b)+((c-d)+d)=a+c$,звідки за означенням віднімання $(a-b)+(c-d)=\left(a+c\right)-(b+d)$.■

2. Ділення натуральних чисел. Властивості ділення

Операцію ділення введемо як операцію, обернену до операції множення.

Означення 2.9. Діленням числа a на число b називається операція, яка числам $a, b \in N_0$ зіставляє число c, яке називається їхньою часткою, (*позначення* $c = \frac{a}{b} \in N_0$ (або $c = a : b$)), і таке, що $\frac{a}{b}\cdot b=a$.

У записі $\frac{a}{b}\cdot b=a$ число a називають діленим, b – дільником, c – часткою. Якщо частка $\frac{a}{b}$ існує, то кажуть, що a ділиться на b.

Якщо $a = 0$, то для довільного $b \neq 0$ частка існує і $\frac{0}{b} = 0$, що випливає з рівності $0\cdot b=0$.

Якщо $a=b=0$, то, оскільки $\forall c\in N_0\left(c\cdot 0=0\right)$, виразу $\frac{0}{0}$ можна надати будь-якого значення. Тому вираз $\frac{0}{0}$ не має смислу.

Якщо $a\neq 0, b=0$, то ні для якого c не може виконуватись рівність $c\cdot 0=a$, тому частка $\frac{a}{0}$ не існує. Цим самим обґрунтовано, , що ділення на нуль неможливе.

✍ Приклад 2.8. Частка чисел 8 і 2 дорівнює 4 ($8:2=4$), бо $4\cdot 2=4\cdot 1'=4\cdot 1+4=4+4=8$.

Розглянемо випадок, коли $a, b \in N$, тобто $a \neq 0, b \neq 0$.

Теорема 2.22. Для існування частки $\dfrac{a}{b}$ ($a \neq 0, b \neq 0$) необхідно (але не достатньо), щоб $a \geq b$. Якщо частка існує, то вона єдина.

$\bullet$ Доведення. Нехай $\exists c \in N \; c = \dfrac{a}{b}$. Тоді за означенням частки $c \cdot b = a$. Але $c \neq 0$ (бо $0 \cdot b = 0 \neq a$), тому $c \geq 1$ і завдяки монотонності множення $cb \geq b$, тобто $a \geq b$.

Доведемо єдиність частки. Припустимо, що існують дві частки: $c_1 = \dfrac{a}{b}, c_2 = \dfrac{a}{b}$, тоді за означенням частки $c_1 \cdot b = a$ і $c_2 \cdot b = a$, тому $c_1 \cdot b = c_2 \cdot b$. Якби $c_1 \neq c_2$, то із-за монотонності множення було б $c_1 \cdot b \neq c_2 \cdot b$; отже, $c_1 = c_2$.■

Умова $a \geq b$ не є достатньою для існування частки $\dfrac{a}{b}$. Нехай , наприклад, $a = 4, b = 3$; покажемо, що не існує такого $c \in N$, що $c \cdot 3 = 4$. Справді, якщо таке c існує, то $4 = c \cdot 3 > c \cdot 1 = c$, тобто $c < 4$. Тому може бути: $c = 1 \vee c = 2 \vee c = 3$. Але $1 \cdot 3 = 3,\; 2 \cdot 3 = 6, 3 \cdot 3 = 9$. Серед отриманих добутків нема числа 4. Отже, частки чисел 4 і 3 у множині натуральних чисел не існує.

Отже, ділення, як і віднімання, не є алгебраїчною операцією на множині N_0 (і навіть на N), бо вона не завжди є виконуваною. Проте для віднімання ми встановили просту необхідну і достатню умову виконуваності, тоді як для ділення поки що встановлено лише необхідну умову.

3. Властивості відношення подільності

Нагадаємо, що таке відношення подільності у множині натуральних чисел.

Означення 2.10. Нехай $a \in N_0, b \in N$. Кажуть, що числа a та b знаходяться у відношенні подільності (*позначення*: $a \vdots b$), якщо $\exists c \in N_0\ a = c \cdot b$.

✍ Приклад 2.9. $12 \vdots 3$, бо $\exists c = 4\ 12 = 4 \cdot 3$. З викладеного вище маємо, що $\overline{4 \vdots 3}$.

Сформулюємо й доведемо властивості відношення подільності у множині *N*.

Теорема 2.23 (рефлективність відношення подільності)

$$\forall a \in N\ a \vdots a.$$

• Доведення. Дійсно, $\forall a \in N\ a \cdot 1 = a$, тому $\forall a \in N\ a \vdots a$. ■

Теорема 2.24 (антисиметричність відношення подільності)

$$\forall\, a, b \in N \quad a \vdots b \wedge b \vdots a \Rightarrow a = b$$

• Доведення. Якщо $a \vdots b$, то $a \geq b$. Так само з $b \vdots a$ слідує, що $b \geq a$. Отже, $a=b$. ■

Теорема 2.25 (транзитивність відношення подільності)

$$\forall\, a, b, c \in N \quad a \vdots b \wedge b \vdots c \Rightarrow a \vdots c$$

• Доведення. За означенням відношення подільності $a \vdots b \Rightarrow \exists n \in N\ a = bn$; аналогічно, $b \vdots c \Rightarrow \exists m \in N\ b = cm$. Тоді $a = (cm)n = c(mn) \Rightarrow a \vdots c$. ■

Таким чином, відношення подільності є рефлексивним, антисиметричним і транзитивним, тобто відношенням часткового нестрогого порядку в множині натуральних чисел *N*. Структура $(N, \vdots)$ є частково нестрого упорядкована множина.

4. Ознаки подільності суми, різниці, добутку

Сформулюємо й доведемо кілька тверджень про подільність суми, різниці і добутку натуральних чисел.

Теорема 2.26. $\forall a \in N\ a \vdots 1$

• Доведення слідує з рівності $a \cdot 1 = a$. ■

Теорема 2.27. $(a \vdots c \wedge b \vdots c \wedge m, n \in N_0) \Rightarrow (ma + nb) \vdots c$.

• Доведення. $a \vdots c \Rightarrow \exists q \in N\ a = cq; b \vdots c \Rightarrow \exists r \in N\ b = cr$. Тоді $ma + nb = m(cq) + n(cr) = (mq + nr)c \Rightarrow (ma + nb) \vdots c$.■

Цю теорему можна поширити на довільну скінчену кількість доданків (довести можна за допомогою методу МІ).

Наслідок 2.1. $(a \vdots c \wedge b \vdots c) \Rightarrow (a + b) \vdots c$, тобто якщо всі доданки кратні *c*, то й сума кратна *c*.

Наслідок можна поширити на довільну скінчену кількість доданків (довести можна за допомогою методу МІ).

Теорема 2.28. $(a \vdots c \wedge b \vdots c \wedge m, n \in N_0 \wedge ma \geq nb) \Rightarrow (ma - nb) \vdots c$.

• Доведення аналогічне доведенню теореми 2.27. ■

Наслідок 2.2. $(a \vdots c \wedge b \vdots c \wedge a \geq b) \Rightarrow (a - b) \vdots c$, тобто якщо зменшуване і від'ємник кратні *c*, то й різниця кратна *c*.

Наслідок можна поширити на довільну скінчену кількість чисел (довести можна за допомогою методу МІ).

Теорема 2.29. Нехай у рівності

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_k$$

про всі числа, крім одного, відомо, що вони діляться на *c*. Тоді і це число ділиться на *c*.

• Доведення. Нехай, наприклад, відомо, що всі числа, крім a_n, діляться на *c*. Тоді за означенням різниці $a_n = \left(b_1 + b_2 + \ldots + b_k\right) - \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}\right)$. За наслідком 2.1 суми в обох дужках діляться на *c*, тому за наслідком 2.2 $a_n \vdots c$. ■

Теорема 2.30. $(a \vdots c \wedge b \in N_0) \Rightarrow (ab) \vdots c$, тобто якщо на число *c* ділиться принаймні один із множників, то й добуток ділиться на *c*.

• Доведення.
$(a \vdots c) \Rightarrow (\exists q \in N_0\ a = cq) \Rightarrow (ab = (cq)b = c(qb)) \Rightarrow (ab) \vdots c$.■

Обернене твердження, взагалі кажучи, не є правильним: з подільності добутку ще не слідує подільність хоча б одного з множників. Так, $\left(3 \cdot 4\right) \vdots 6$, але $\overline{3 \vdots 6} \wedge \overline{4 \vdots 6}$.

З введених означень операцій додавання, віднімання, множення, ділення, відношення «>» і їхніх властивостей можна зробити такі висновки:

1. Алгебраїчна структура $(N,+,>)$ – лінійно і строго упорядкована півгрупа. Операція «+»– комутативна.

2. Алгебраїчна структура $(N,\cdot,>)$ – лінійно і строго упорядкована півгрупа з одиницею. Операція «$\cdot$» – комутативна.

3. Алгебраїчна структура $(N,+,\cdot,>)$ – лінійно і строго упорядковане півкільце з одиницею.

Для цих структур виконуються відповідні властивості, сформульовані в темі 1.3.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОТРОЛЮ

1. Сформулюйте означення операції віднімання у множині натуральних чисел. Як називаються компоненти і результат цієї операції? Чи є ця операція алгебраїчною у множині натуральних чисел? Відповідь обґрунтуйте.
2. Сформулюйте теорему 2.18 для натуральних чисел. Чи існує різниця $a-a$ у множині натуральних чисел? А у множині цілих невід'ємних чисел? Відповідь обґрунтуйте.
3. Доведіть теорему 2.21.
4. Сформулюйте означення операції ділення у множині натуральних чисел. Як називаються компоненти і результат цієї операції? Чи є ця операція алгебраїчною у множині натуральних чисел? Відповідь обґрунтуйте.
5. Обґрунтуйте неможливість ділення на нуль.
6. Сформулюйте означення відношення подільності. Які воно має властивості?
7. Чи будуть структури $(N,+,\vdots)$, $(N,\cdot,\vdots)$ упорядкованими алгебраїчними структурами? Якщо так, то якими саме? Відповідь обґрунтуйте.
8. Обґрунтуйте такі твердження (вкажіть відповідні теоретичні факти, з яких ці твердження слідують):

   a. Алгебраїчна структура $(N,+,>)$ – лінійно і строго упорядкована півгрупа. Операція «+»– комутативна.

   b. Алгебраїчна структура $(N,\cdot,>)$ – лінійно і строго упорядкована півгрупа з одиницею. Операція «$\cdot$» – комутативна.

   c. Алгебраїчна структура $(N,+,\cdot,>)$ – лінійно і строго упорядковане півкільце з одиницею.

9. Сформулюйте ознаки подільності на 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 25. У які групи ви об'єднали б ці ознаки?

10. Знайдіть різницю 15 – 9 і обґрунтуйте результат.

11. Знайдіть частку 15 : 3 і обґрунтуйте результат.

12. Обґрунтуйте, що $18 \vdots 3$, а $\overline{16 \vdots 3}$.

13. Нехай S – сума чотирьох доданків, кожне з яких є натуральним числом, c – число натуральне, $c < S$. Що можна сказати про кратність числа S числу c, якщо:

а) всі доданки кратні c;

б) всі доданки не кратні c;

в) два доданки кратні c, а два – не кратні;

г) три доданки кратні c, а один – не кратний;

д) один доданок кратний c, а три – не кратні?

Відповіді обґрунтуйте. Дайте відповіді на ці самі запитання, якщо $c = S$, $c > S$.

Тема 2.5. Характеристика системи аксіом Пеано

1. **Поняття про аксіоматичний метод. Властивості аксіоматичних теорій**
2. **Властивості аксіоматичної теорії натуральних чисел**

1. **Поняття про аксіоматичний метод. Властивості аксіоматичних теорій**

Один із різновидностей дедуктивного методу – аксіоматичний метод, найабстрактніший і найуживаніший метод вивчення математичних систем. Аксіоматизація дає можливість систематизувати теорію, найточніше виявити її логічну структуру. Н. Бурбакі у роботі «Нариси з історії математики» так охарактеризували роль аксіоматичного методу: «Аксіоматичний метод вчить нас ... знаходити спільні ідеї, що ховаються за деталями, властивими кожній з розглянутих теорій, витягувати ці ідеї і піддавати їх дослідженню». Водночас треба підкреслити, що аксіоматичний метод має обмежене застосування, оскільки вимагає високого рівня розвитку змістовної теорії.

Три основних періоди, які пройшов у своєму розвитку аксіоматичний метод:

1) період змістовної аксіоматизації (від часів Евкліда і до середини XIX століття це була єдина форма аксіоматизації теорій);

2) період напівформальної аксіоматизації (з другої половини XIX століття);

3) період формальної аксіоматизації (з початку XX століття).

Кожен наступний період не заперечує попередній, а навпаки, кожна наступна форма аксіоматизації узагальнює і розвиває попередню. На сьогодні у різних розділах математики використовуються всі три форми аксіоматизації. Так, наприклад, теорія числових систем, теорія ймовірностей – напівформальні аксіоматичні теорії; числення висловлень, числення предикатів

– формальні аксіоматичні теорії; яскравим прикладом змістовної аксіоматизації є аксіоматична побудова геометрії Евкліда.

Назвемо основні характеристики кожної з форм аксіоматизації наукових теорій.

Змістовна аксіоматизація теорій. Шляхом означень чи описових характеристик спочатку формується область основних об'єктів. Система аксіом описує основні властивості, відношення та зв'язки об'єктів цієї області. Логічні засоби, які використовуються для доведень тверджень, не описуються в жодній формі.

Напівформальна аксіоматизація теорій. Прямих означень чи описових характеристик основні поняття не мають, опосередковано вони означаються через систему аксіом. В останніх фіксуються властивості, відношення та зв'язки основних об'єктів теорії. Логічні засоби, які використовуються для доведення тверджень, не описуються в жодній формі (наприклад, напівформальна аксіоматична теорія натуральних чисел).

Формальна аксіоматизація теорій. Формалізація будь-якої теорії передбачає перетворення її на об'єкт вивчення. Для цього описується мова даної теорії: вказується алфавіт теорії – множина всіх її вихідних символів; серед слів (скінченних послідовностей символів) виокремлюють формули; з класу формул виокремлюють аксіоми; вказуються точно правила виводу – правила переходу від одних формул даної теорії до інших формул цієї ж теорії (наприклад, числення висловлень).

Властивості аксіоматичних теорій: категоричність, незалежність, несуперечливість, повнота системи аксіом цієї теорії.

Означення 2.11. Аксіоматична теорія T називається категоричною, якщо будь-які дві її моделі ізоморфні.

Якщо аксіоматична теорія категорична T має єдину модель з точністю до ізоморфізму. Змістовні аксіоматичні теорії усіх числових систем категоричні. Важливим прикладом некатегоричної теорії є теорія груп, загальна теорія кілець і полів.

<u>*Означення 2.12.*</u> Нехай $M = \{M_1, M_2, \ldots, M_k\}$ – система аксіом аксіоматичної теорії T. Аксіома $M_i \in M$ називається незалежною від решти аксіом системи M, якщо її не можна з них вивести засобами теорії T. Якщо кожна аксіома з M не залежить від решти аксіом цієї системи, то M називають незалежною системою аксіом.

Для доведення незалежності аксіоми M_i від решти аксіом даної системи M треба побудувати модель S аксіоматичної теорії T, в якій усі аксіоми системи M справджуються (виконуються), а аксіома M_i – ні. Справді, коли б аксіома M_i була вивідною з решти аксіом системи M, то вона також справджувалася б на моделі S.

<u>*Означення 2.13.*</u> Система аксіом називається внутрішньо несуперечливою, якщо з неї не можна вивести 2 протилежних твердження: F і $\overline{F}$. Система аксіом називається змістовно несуперечливою, якщо існує хоча б одна її модель.

Отже, питання про змістовну несуперечливість системи аксіом зводиться до питання несуперечливості її моделі.

<u>*Означення 2.14.*</u> Система аксіом називається повною, якщо її не можна доповнити твердженням, яке б:

1) не суперечило аксіомам системи;
2) не залежало від них;
3) не вводило нових неозначуваних понять.

2. Властивості аксіоматичної теорії натуральних чисел

Наведемо без доведення (доведення методом моделей наведено у [1]) дві властивості системи аксіом Пеано *змістовної* теорії натуральних чисел.

Теорема 2.31. Аксіоматична теорія натуральних чисел (на основі системи аксіом Пеано) категорична.

Теорема 2.32. Система аксіом Пеано незалежна.

Зауважимо, що у змістовній теорії натуральних чисел несуперечливість системи аксіом Пеано не можна довести за методом моделей, бо для цього доведеться користуватися моделями складнішої природи, несуперечливість яких ще складніше довести чи інтуїтивно зрозуміти. Абсолютне доведення несуперечливості в цій теорії також неможливе, бо в змістовній теорії нема поняття формального доведення, Отже, впевненість у несуперечливості змістовної теорії має досвідний характер. З несуперечливості і категоричності змістовної аксіоматичної теорії випливає її повнота в тому розумінні, що всі істинні твердження інтуїтивної арифметики є такими і в змістовній аксіоматичній теорії.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОТРОЛЮ

1. Розкрийте сутність аксіоматичного методу. Наведіть приклади аксіоматичних теорій.
2. Вкажіть основні етапи розвитку аксіоматичного методу.
3. Назвіть основні характеристики змістовної аксіоматичної теорії. Наведіть приклади таких теорій.
4. Назвіть основні характеристики напвівформальної аксіоматичної теорії. Наведіть приклади таких теорій.
5. Назвіть основні характеристики формальної аксіоматичної теорії. Наведіть приклади таких теорій.
6. Назвіть основні властивості аксіоматичної теорії.
7. Яка аксіоматична теорія називається категоричною?
8. Яка аксіоматична теорія називається несуперечливою?
9. Яка аксіоматична теорія називається незалежною?
10. Яка аксіоматична теорія називається повною?
11. Назвіть властивості змістовної аксіоматичної теорії натуральних чисел. Який метод використовують для доведення цих властивостей? Розкрийте його сутність.

Запитання до колоквіуму
«Змістовий модуль 2. Система натуральних чисел.»

1. Поняття про аксіоматичну побудову математичної теорії. Вимоги до системи аксіом.
2. Аксіоми Пеано. Найпростіші наслідки з аксіом Пеано.
3. Принцип математичної індукції. Метод математичної індукції.
4. Означення системи натуральних чисел.
5. Означення додавання натуральних чисел.
6. Теорема про існування та єдиність суми.
7. Комутативна властивість додавання.
8. Асоціативна властивість додавання.
9. Закон скорочення для додавання.
10. Означення множення натуральних чисел.
11. Теорема про існування та єдиність добутку.
12. Дистрибутивна властивість множення відносно додавання.
13. Комутативна властивість множення.
14. Асоціативна властивість множення..
15. Закон скорочення для множення.
16. Відношення порядку на множині натуральних чисел.
17. Властивості відношення «менше» на множині натуральних чисел.
18. Монотонність відносно додавання.
19. Монотонність відносно множення.
20. Розширений натуральний ряд.
21. Віднімання натуральних чисел.
22. Теорема про існування та єдиність різниці.
23. Основні властивості віднімання.
24. Ділення натуральних чисел.
25. Теорема про існування частки.
26. Основні властивості ділення.
27. Поняття про аксіоматичний метод. Етапи розвитку аксіоматичного методу.
28. Властивості аксіоматичної теорії.
29. Категоричність аксіоматичної теорії натуральних чисел.
30. Незалежність системи аксіом Пеано.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3.
СИСТЕМА ЦІЛИХ ЧИСЕЛ.
СИСТЕМА РАЦІОНАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

Тема 3.1. Цілі числа

1. **Задача розширення поняття про число**
2. **Аксіоми цілих чисел і деякі наслідки з них**
3. **Властивості цілих чисел**
4. **Властивості системи аксіом цілих чисел**

1. Задача розширення поняття про число

Далі на основі півкільця N натуральних чисел побудуємо числові системи цілих (Z), раціональних (Q), дійсних (R), комплексних (C) чисел як змістовні аксіоматичні теорії.

Розширення числової системи A до нової числової системи B полягає в такому: до чисел системи A приєднуємо нові числа, яких у системі A нема; поширюємо основні операції (алгебраїчні й неалгебраїчні) системи A на всі елементи системи B; з'ясовуємо можливість поширення відношення порядку з числової системи A на елементи системи B.

Спільними основними операціями для всіх числових систем є додавання «+» і множення «$\cdot$», а їхніми основними властивостями – комутативність, асоціативність і дистрибутивність множення відносно додавання. Крім операції додавання і множення, для числових систем характерні й інші важливі з теоретичного і практичного відношення (часткові алгебраїчні операції): віднімання і ділення (як обернені відповідно до операції додавання і множення), добування кореня натурального степеня, неалгебраїчне відношення граничного переходу.

Особливу увагу звертаємо на збереження основних властивостей алгебраїчних операцій додавання «+» і множення «$\cdot$» та на можливість продовження порядку з числової системи A у числову систему B.

Сформулюємо основні вимоги, яких будемо дотримуватися під час розширення числових систем:
1) У системі цілих чисел Z завжди повинне мати розв'язок рівняння $b + x = a$ для довільних $b, a \in Z$. (Нагадаємо, що у множині натуральних чисел таке твердження не виконується).
2) У системі раціональних чисел Q завжди повинне мати розв'язок рівняння $b \cdot x = a$ для довільних $b, a \in Q \wedge b \neq 0$.
3) Система дійсних чисел R має бути замкнена відносно часткової неалгебраїчної операції граничного переходу: границя будь-якої фундаментальної послідовності елементів дійсних чисел має бути дійсним числом.
4) У системі комплексних чисел C завжди повинна виконуватись операція добування кореня будь-якого натурального степеня з комплексного числа.

Кожну числову систему будемо означати аксіоматично, об'єднавши аксіоми у дві групи: перша група – структурні аксіоми кільця (позначатимемо $A_к$) і структурні аксіоми поля (позначатимемо A_p); друга група – спеціальні аксіоми. Першу групу у явному вигляді кожного разу виписувати не будемо.

2. Аксіоми цілих чисел і деякі наслідки з них

<u>*Означення 3.1.*</u> Алгебраїчну структуру (Z, + , , 0, 1, N) називають системою цілих чисел, а її елементи – цілими числами, якщо виконуються такі властивості (аксіоми цілих чисел):

1) структурні аксіоми $A_к$;

2) спеціальні аксіоми:

z.1) (N, +, $\cdot$, 1) – півкільце натуральних чисел
z.2) $N \subset Z$
z.3) Аксіома мінімальності. Нехай $M \subset Z$, причому: а) $N \subset M$; б) $\forall a, b \in M \ \ (a - b) \in M$. Тоді $M = Z$.

Позначення: $(Z, +, \cdot)$ коротко позначатимемо систему цілих чисел; $(Z, +, 0)$ – адитивна група цілих чисел; $(Z, \cdot, 1)$ – мультиплікативна півгрупа цілих чисел.

З означення системи цілих чисел (аксіоми множини $A_к$) слідує, що $(Z,+,\cdot)$ – кільце, а тому рівняння $b+x=a$ має розв'язок у Z для будь-яких $b,a\in Z$ (у тому числі і для $b,a\in N$). Цей розв'язок позначатимемо символом $x=a-b$, де

$$a-b=a+\left(-b\right). \tag{3.1}$$

Зауважимо, що в півкільці натуральних чисел N рівність (3.1) не має смислу. Дійсно, для $b\in N$ запис $-b$ не має смислу.

Для натуральних чисел $b,a\in N, a>b$ під записом $x=a-b$ будемо розуміти різницю натуральних чисел a та b. (Нагадайте, чому така різниця існує).

✍ <u>Приклад 3.1.</u> Розв'язуючи рівняння виду $b+x=a$ завжди варто пам'ятати, для якої числової системи це рівняння розглядають. Так, рівняння $3+x=2$ не має розв'язків на множині натуральних чисел (дійсно, різниці чисел 2 і 3 на множині натуральних чисел не існує, бо $2<3$) і має єдиний розв'язок на множині цілих чисел.

3. Властивості цілих чисел

Оскільки система цілих чисел є кільцем, то всі властивості додавання і множення, які виконуються в довільному кільці, виконуються і в кільці цілих чисел (нагадайте ці властивості).

Теорема 3.1. Кожне ціле число є різниця натуральних чисел, тобто $\forall a\in Z\ \exists k\in N\ \exists l\in N\quad (a=k-l)$.

І $k-l=k_1-l_1 \Leftrightarrow k+l_1=k_1+l$.

• Доведення. Доведемо, використовуючи аксіому мінімальності. Нехай множина M – множина тих цілих чисел, які можна представити у вигляді різниці двох натуральних чисел, $M\subset Z$. Оскільки кожне натуральне число n можна представити у вигляді $n=(n+1)-1, n+1\in N, 1\in N$, то $N\subset M$. Нехай тепер $a,b\in M$. Це означає, що існують такі натуральні числа k, l, m, n, що $a = k-l$, $b=m-n$. Тоді, використовуючи властивості різниці (вкажіть, які саме), маємо:

$a-b=(k-l)-(m-n)=(k+n)-(l+m)$, тобто елемент $a-b$ є різницею натуральних і тому $a-b\in M$. Отже, за аксіомою мінімальності $M = Z$.

Доведемо еквіваленцію $k-l=k_1-l_1 \Leftrightarrow k+l_1=k_1+l$. Дійсно, $k-l=k_1-l_1 \Leftrightarrow k+(-l)=k_1+(-l_1) \Leftrightarrow k+(-l)+(l+l_1)=k_1+(-l_1)+$ $+(l+l_1) \Leftrightarrow k+l_1=k_1+l$ (обґрунтуйте записані еквіваленції). ■

Теорема 3.2. Кільце $(Z,+,\cdot)$ є комутативним кільцем з одиницею.

• Доведення. Треба показати, що операція множення є комутативною і у множині цілих чисел існує одиничний елемент. Нехай $a,\ b\in Z$. Тоді, згідно з теоремою 3.1, існують такі натуральні числа *k*, *l*, *m*, *n*, що $a=k-l$, $b=m-n$. Звідси маємо:

$a\cdot b=(k-l)(m-n)=(km+ln)-(kn+lm)=(mk+nl)-(nk+ml)=$ $=(m-n)(k-l)=b\cdot a$. (Обґрунтуйте записані рівності!).

Одиниця 1 півкільця натуральних чисел *N* є одиницею кільця *Z*, бо $\forall a\in Z\ a\cdot 1=(k-l)\cdot 1=k\cdot 1-l\cdot 1=k-l=a$.■

Теорема 3.3. Кожне ціле число є або нуль, або натуральне число, або протилежне натуральному числу.

• Доведення. Те, що нуль і кожне натуральне число – цілі числа, слідує з означення кільця цілих чисел (дійсно, $N\subset Z$ і відносно операції додавання у множині цілих чисел є нейтральний (нульовий) елемент). Нехай *a* – довільне ціле число. Тоді $a=k-l$, де *k*, *l* ∈ *N*. Як відомо, для натуральних чисел *k*, *l* можливі лише три несумісні одне з одним випадки: $k=l\vee k=l+m\vee l=k+n$, де *m*, *n* – натуральні числа. У першому випадку $a=k-k=0$. У другому випадку $a=(l+m)-l=m$, тобто *a* – натуральне число. У третьому випадку $a=k-(k+n)=k-k-n=-n$, тобто *a* – число, протилежне натуральному (від'ємне ціле число). ■

Теорема 3.4. Кільце цілих чисел можна впорядкувати і притому єдиним способом. Відношення порядку в кільці цілих чисел архімедівське і є продовженням порядку в півкільці натуральних чисел.

• Доведення. Щоб довести, що кільце цілих чисел $(Z,+,\cdot)$ можна впорядкувати, треба, згідно з критерієм порядку, показати, що в ньому можна виокремити множину Z^+ додатних елементів. Неважко впевнитися, що множиною Z^+ може бути множина натуральних чисел N, тобто $Z^+ = N$, і можливість упорядкування кільця Z доведено.

Доведемо єдиність. Для цього застосуємо критерій однозначності порядку. Нехай Z^{++} – будь-яка додатна частина кільця Z. Оскільки $1 \neq 0$, то $1 = 1^2 \in Z^{++}$. Далі $n \in Z^{++} \Rightarrow n+1 \in Z^{++} \wedge Z^+ = N \subset Z^{++}$. Тоді $Z^+ = Z^{++}$ і доведено однозначність порядку в кільці Z.

Щоб довести, що відношення порядку в кільці цілих чисел архімедівське і є продовженням порядку в півкільці натуральних чисел, введемо відношення порядку > у кільці цілих чисел Z за таким означенням: $\forall a \in Z\ \forall b \in Z\ (a > b \Leftrightarrow a - b \in Z^+ = N)$. Звідси маємо, що відношення порядку > у кільці цілих чисел Z є продовженням порядку в півкільці натуральних чисел N. Нехай $n \in N$. Тоді з рівності $1 = (-n) + (n+1)$, маємо, що $1 > -n$, тобто одиниця більша за будь-яке від'ємне число, а, отже, будь-яке натуральне число більше за будь-яке від'ємне ціле число. Нехай тепер $b \in N$, $a \in Z$. Тоді: якщо $a \in N$, то $\exists n \in N\left(n \cdot b > a\right)$, бо півкільце натуральних чисел архімедівськи впорядковане. Якщо ж $-a \in N$, то $1 \cdot b = b > a$. Таким чином, $\forall a \in Z\ \forall b \in Z\ \exists n \in N\ \left(n \cdot b > a\right)$, тобто кільце цілих чисел Z архімедівськи впорядковане. ■

Обґрунтуємо правила вибору знаків під час множення і додавання цілих чисел.

Множення. Спочатку покажемо, що $\forall a \in Z\ (a \cdot 0 = 0)$. Справді, $a \cdot 0 = a \cdot (b - b) = a \cdot b - a \cdot b = 0$. Тоді:

$$a \cdot (b - b) = 0 \Rightarrow a \cdot (b + (-b)) = a \cdot b + a \cdot (-b) = 0 \Rightarrow \boxed{a \cdot (-b) = -a \cdot b}.$$

$$(a + (-a)) \cdot (-b) = 0 \Rightarrow a \cdot (-b) + (-a) \cdot (-b) = 0 \Rightarrow -a \cdot b + (-a) \cdot (-b) = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{(-a) \cdot (-b) = a \cdot b}.$$

Додавання. 1) Якщо обидва доданки додатні або від'ємні, то на із-за монотонності додавання їхня сума також відповідно додатна або від'ємна. 2) Нехай тепер $a > 0$ і $b < 0$ – цілі числа, і $|a| < |b|$. Тоді $|b| = -b$, бо $b < 0 \Rightarrow -b > 0 \Rightarrow -b > b$. Аналогічно маємо , що $|a| = a$. Оскільки за умовою $|a| < |b|$, $|b| = -b$, $|a| = a$, то $a < -b$. Враховуючи монотонність відносно операції додавання, маємо: $a < -b \Rightarrow a + b < -b + b \Rightarrow a + b < 0$. Отже, у цьому випадку знак суми визначається знаком більшого за модулем доданка. Аналогічно розглядаємо випадок, якщо $a > 0, b < 0, |a| > |b|$.

4. Властивості системи аксіом цілих чисел

Сформулюємо без доведення дві властивості системи аксіом цілих чисел (доведення методом моделей наведено у [1]).

Теорема 3.5. Система аксіом цілих чисел несуперечлива (якщо такою є система аксіом натуральних чисел – система аксіом Пеано).

Теорема 3.6. Система аксіом цілих чисел категорична.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОТРОЛЮ

1. Сформулюйте основні вимоги, які мають виконуватися під час розширення числових систем.
2. Сформулюйте означення системи цілих чисел. Випишіть аксіоми кільця у явному вигляді.
3. Що означає: «$(Z,+,0)$ – адитивна група цілих чисел»?
4. Що означає «$(Z,\cdot,1)$ – мультиплікативна півгрупа цілих чисел»?

5. Наведіть приклад рівняння вигляду $b+x=a$, яке: а) не має розв’язку на множині натуральних чисел, але має розв’язок на множині цілих чисел; б) має розв’язок і на множині цілих чисел, і на множині натуральних чисел; в) не має розв’язку на множині цілих чисел.

6. Чи правильні речення: а) якщо рівняння $b+x=a$ має розв’язок на множині цілих чисел, то воно має розв’язок і на множині натуральних чисел; б) якщо рівняння $b+x=a$ має розв’язок на множині натуральних чисел, то воно має розв’язок і на множині цілих чисел?

7. У якому вигляді можна представити ціле число через натуральні числа? Чи єдиним способом можна записати таке представлення?

8. Яку роль відіграє теорема 3.3 у шкільному курсі математики? Відповідь підтвердіть відповідним посиланням на підручник з математики.

9. Обґрунтуйте правило вибору знаків під час множення цілих чисел.

10. Обґрунтуйте правило вибору знаків під час додавання цілих чисел.

11. Якщо $a>0, b<0, |a|>|b|$, то $a+b>0$. Доведіть це.

12. Сформулюйте властивості системи аксіом цілих чисел.

13. Нагадаємо, що множини називаються рівнопотужними, якщо між ними можна встановити бієкцію (взаємнооднозначну відповідність). Доведіть, що множини цілих і натуральних чисел рівнопотужні.

14. Доведіть, що множина цілих чисел зчисленна.

15. Доведіть, що множина цілих чисел дискретна.

16. Пара (a,b) називається додатною (від’ємною), якщо $a>b$ ($a<b$). Доведіть, що добуток двох від’ємних пар є пара додатна. (Добуток двох пар означаємо так: $(a,b)\cdot(c,d)=(ac+bd, ad+bc)$).

17. Проаналізуйте, як у шкільному курсі математики обґрунтовуються правила вибору знаку під час додавання й множення цілих чисел.

18. Проаналізуйте, як у шкільному курсі математики порівнюють два цілих числа.

Тема 3.2. Раціональні числа

1. Означення системи раціональних чисел. Найпростіші наслідки з аксіом

2. Властивості раціональних чисел

1. Означення системи раціональних чисел. Найпростіші наслідки з аксіом

Побудуємо аксіоматичну теорію множини раціональних чисел, дотримуючись вимоги, щоб у системі раціональних чисел Q завжди мало розв'язок рівняння $b \cdot x = a$ для довільних $b, a \in Q \wedge b \neq 0$.

<u>*Означення 3.2.*</u> Алгебраїчну структуру $\left(Q,\ +,\ \cdot, 0, Z\right)$ називають системою раціональних чисел, а її елементи – раціональними числами, якщо виконуються такі властивості (аксіоми) раціональних чисел:

1) структурні аксіоми A_p;

2) спеціальні аксіоми:

q.1) $\left(Z,\ +,\ \cdot, 0\right)$ – кільце цілих чисел;

q.2) $Z \subset Q$;

q.3) Аксіома мінімальності. Нехай $M \subset Q$ і виконуються умови:

а) $Z \subset M$; б) $\forall q_1 \in M, q_1 \neq 0\ \forall q_2 \in M\ \left(\dfrac{q_2}{q_1} \in M\right)$. Тоді $M = Q$.

Позначення: $(Q,\ +,\ \cdot)$ – скорочене позначення системи цілих чисел; $(Q,\ +,\ \cdot, 0)$ – адитивна група раціональних чисел, $\left(Q \setminus \{0\},\ \cdot, 1\right)$ – мультиплікативна група раціональних чисел.

З урахуванням того, що $(Q,\ +,\ \cdot)$ є полем, маємо:

1) Рівняння $q_1 \cdot x = q_2$ має розв'язок на множині раціональних чисел Q для будь-яких $q_1 \neq 0, q_2$. Цей розв'язок

називають часткою чисел q_2 на q_1 і *позначають* $\frac{q_2}{q_1}$, тобто $q_1 \cdot \frac{q_2}{q_1} = q_2$.

2) $\forall q \in Q \; \exists !(-q) \in Q \; (q + (-q) = 0)$.

3) $\forall q \in Q \setminus \{0\} \; \exists !(q^{-1}) \in Q \; (q \cdot q^{-1} = 1)$.

4) Частку $\frac{q_2}{q_1}$ можна записати у вигляді $q_2 \cdot q_1^{-1}$. Тому розв'язок рівняння $q_1 \cdot x = q_2$ можна записати як $x = q_2 \cdot q_1^{-1}$, $q_1 \neq 0$.

✍ <u>Приклад 3.2.</u> Розв'язуючи рівняння виду $b \cdot x = a$ завжди варто пам'ятати, для якої числової системи це рівняння розглядають. Так, рівняння $2 \cdot x = 1$ не має розв'язків на множині цілих (і натуральних) чисел і має єдиний розв'язок на множині раціональних чисел. Покажемо це. Припустимо, що рівняння $2 \cdot x = 1$ має розв'язок на множині цілих чисел. Оскільки всяке ціле число можна записати у вигляді різниці двох натуральних чисел, то $x = k - l, k, l \in N$. Тоді $2 \cdot x = 2 \cdot (k - l) = 2 \cdot k - 2 \cdot l$. Маємо, що $2 \cdot k - 2 \cdot l = 1 \Rightarrow 2 \cdot k = 2 \cdot l + 1$. Остання рівність на множині натуральних чисел неправильна. Отже, припущення, що рівняння $2 \cdot x = 1$ має розв'язок на множині цілих чисел є хибним. Якщо розглядати це рівняння на множині раціональних чисел, то його розв'язок $x = \frac{1}{2}$.

2. Властивості раціональних чисел

Теорема 3.7. Кожне раціональне число є часткою двох цілих чисел, тобто $\forall q \in Q \; \exists a \in Z \; \exists b \in Z \wedge b \neq 0 \left(q = \frac{a}{b} \right)$.

І $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c, a, b, c, d \in Z, b \neq 0, d \neq 0$.

•Доведення. Теоретична основа доведення – аксіома мінімальності раціональних чисел. Позначимо через M множину тих раціональних чисел з Q, які можна подати у вигляді $q=\frac{a}{b}$, $b\neq 0$. Оскільки кожне ціле число a можна подати у вигляді $\frac{a}{1}$, то $Z\subset M$. Нехай тепер $q_1, q_2\in M$, тобто $q_1=\frac{a}{b}, a,b\in Z, b\neq 0$, $q_2=\frac{c}{d}, c,d\in Z, d\neq 0$. Нехай $q_1\neq 0$ (тоді й $a\neq 0$). Розглянемо

$$\frac{q_2}{q_1}=q_2\cdot q_1^{-1}=(c\cdot d^{-1})\cdot(a\cdot b^{-1})^{-1}=(c\cdot d^{-1})\cdot(a^{-1}\cdot b)=(b\cdot c)\cdot(a\cdot d)^{-1},$$

тобто $\frac{q_2}{q_1}$ є часткою двох цілих чисел і тому $\frac{q_2}{q_1}\in M$. Отже, $M=Q$.

Доведемо еквіваленцію $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c$.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\cdot b^{-1}=c\cdot d^{-1}\Leftrightarrow(a\cdot b^{-1})\cdot(b\cdot d)=(c\cdot d^{-1})\cdot(b\cdot d)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\cdot(b^{-1}\cdot b)\cdot d=c\cdot(d^{-1}\cdot d)\cdot b\Leftrightarrow a\cdot d=c\cdot b.$$

(Обґрунтуйте записані еквіваленції!). ■

Нагадаємо, що запис вигляду $\frac{a}{b}$, де $a,b\in Z$, $b\neq 0$ називають дробом. Дріб – це не ЧИСЛО, це символ для запису раціонального числа.

Розглянемо кілька наслідків з теореми 3.7.

Наслідок 3.1. Для кожного цілого числа $s\neq 0$ виконується рівність: $\frac{a}{b}=\frac{a\cdot s}{b\cdot s}$.

Це означає, що кожне раціональне число q не єдиним способом можна записати у вигляді дробу.

Наслідок 3.2. Нехай $q_1 = \frac{a}{b}$, $q_2 = \frac{c}{b}$. Тоді $q_1 + q_2 = \frac{a+c}{b}$.

• Доведення. $q_1 + q_2 = a \cdot b^{-1} + c \cdot b^{-1} = (a+c) \cdot b^{-1} = \frac{a+c}{b}$.■

Наслідок 3.3. Нехай $q_1 = \frac{a}{b}$, $q_2 = \frac{c}{d}$. Тоді:

а) $q_1 + q_2 = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$; б) $q_1 - q_2 = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}$; в) $q_1 \cdot q_2 = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$;

г) $\frac{q_1}{q_2} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$.

• Доведення. За наслідком 3.1 $q_1 = \frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d}$, $q_2 = \frac{c}{d} = \frac{b \cdot c}{b \cdot d}$. Тоді за наслідком 3.2 $q_1 + q_2 = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$. Решту рівностей пропонуємо довести самостійно. ■

Теорема 3.8. Поле раціональних чисел Q можна архімедівськи впорядкувати і єдиним способом. Порядок в Q є продовженням порядку, визначеного в кільці цілих чисел Z.

• Доведення. Спочатку покажемо, що в Q можна виокремити множину додатних елементів Q^+. Побудуємо цю множину так: нехай $q = \frac{a}{b}$, де $a, b \in Z, b \neq 0$. Будемо вважати, що $q \in Q^+ \Leftrightarrow a \cdot b \in N$. Доведемо, що для так побудованої множини Q^+ виконуються всі умови множини додатних елементів кільця. Покажемо, що належність раціонального числа q множині Q^+ не залежить від подання q часткою двох цілих чисел. Дійсно, нехай $q = \frac{a}{b}$, $a, b \in Z, b \neq 0$ і $q = \frac{c}{d}$, $c, d \in Z, d \neq 0$ і $q \neq 0$. $q = \frac{a}{b} \wedge q = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$. Обидві частини останньої рівності помножимо на $b \cdot d$:

$$(a\cdot d)\cdot(b\cdot d)=(b\cdot c)\cdot(b\cdot d)\Leftrightarrow(a\cdot b)\cdot d^2=(c\cdot d)\cdot b^2.$$

З останньої рівності слідує, що добутки $(a\cdot b)$ і $(c\cdot d)$ мають однакові знаки.

Нехай тепер $q=\dfrac{a}{b}$, $a,b\in Z, b\neq 0$ – довільне раціональне число. Очевидно, можливий тільки один з трьох випадків: а) $q=0\Leftrightarrow a=0$; б) $q\in Q^+\Leftrightarrow a\cdot b\in N$; в) $-q\in Q^+\Leftrightarrow -(a\cdot b)\in N$.

Покажемо, що $\forall q_1\in Q^+\ \forall q_2\in Q^+(q_1+q_2\in Q^+\wedge q_1\cdot q_2\in Q^+)$. Маємо, що $q_1\in Q^+\Leftrightarrow a\cdot b\in N, q_1=\dfrac{a}{b}, a,b\in Z, b\neq 0$; аналогічно, $q_2\in Q^+\Leftrightarrow c\cdot d\in N, q_2=\dfrac{c}{d}, c,d\in Z, d\neq 0$. Розглянемо суму цих чисел. За наслідком 3.3 $q_1+q_2=\dfrac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}$. Розглянемо добуток $p=\left(a\cdot d+b\cdot c\right)\cdot\left(b\cdot d\right)=\left(a\cdot b\right)\cdot d^2+\left(c\cdot d\right)\cdot b^2$. Оскільки числа $\left(a\cdot b\right),d^2,\left(c\cdot d\right),b^2$ – натуральні, то й $p\in N$. Отже, $q_1+q_2\in Q^+$.

За наслідком 3.3 $q_1\cdot q_2=\dfrac{a\cdot c}{b\cdot d}$. Розглянемо добуток $r=\left(a\cdot c\right)\cdot\left(b\cdot d\right)=\left(a\cdot b\right)\cdot\left(c\cdot d\right)\in N$ як добуток двох натуральних чисел. Отже, $q_1\cdot q_2\in Q^+$. Таким чином, Q^+ є додатною частиною поля раціональних чисел $(Q,\ +,\ \cdot)$ і його можна впорядкувати.

Покажемо, що цей порядок єдиний. Нехай Q^{++} – будь-яка додатна частина поля $(Q,\ +,\ \cdot)$. Тоді $1=1^2\in Q^{++}$, а, отже, $N\subset Q^{++}$ (число 1 за допомогою операції додавання породжує весь натуральний ряд). Числа виду $q=\dfrac{k}{l}, k,l\in N$ також належать Q^{++}. Це означає, що $Q^+\subset Q^{++}$. Тоді, згідно з критерієм однозначності порядку, $Q^+=Q^{++}$ і однозначність порядку в полі Q доведено.

Оскільки $Z^{+} \subset Q^{+}$, то, згідно з критерієм продовження порядку, порядок у полі раціональних чисел Q є продовженням порядку в кільці цілих чисел Z.

Покажемо, що поле Q архімедівськи впорядковане. Нехай $q_1 = \dfrac{a}{b}, a \cdot b \in N, a, b \in Z, b \neq 0$ і $q_2 = \dfrac{c}{d}, c \cdot d \in N, c, d \in Z, d \neq 0$. Враховуючи наслідок 3.1, завжди можна припустити, що $b > 0 \wedge d > 0$. Оскільки кільце цілих чисел Z архімедівськи впорядковане, то для додатних цілих чисел $a \cdot d$ і $b \cdot c$ можна знайти таке натуральне число *n,* що $n \cdot (a \cdot d) > b \cdot c$. Помножимо обидві частини останньої нерівності на $(b \cdot d)^{-1}$. Після перетворень матимемо: $n \cdot \left(\dfrac{a}{b}\right) > \dfrac{c}{d}$, тобто $n \cdot q_1 > q_2$. Отже, поле раціональних чисел Q архімедівськи впорядковане. ■

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОТРОЛЮ

1. Сформулюйте означення системи раціональних чисел. Випишіть аксіоми поля у явному вигляді.
2. Що означає: «$(Q, +, 0)$ – адитивна група раціональних чисел»?
3. Що означає «$(Q \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ – мультиплікативна група раціональних чисел»?
4. Наведіть приклад рівняння вигляду $b \cdot x = a$, яке: а) не має розв'язку на множині цілих чисел, але має розв'язок на множині раціональних чисел; б) має розв'язок і на множині цілих чисел, і на множині раціональних чисел; в) не має розв'язку на множині раціональних чисел.
5. Чи правильні речення: а) якщо рівняння $b \cdot x = a$ має розв'язок на множині цілих чисел, то воно має розв'язок і на множині раціональних чисел; б) якщо рівняння $b \cdot x = a$ має розв'язок на множині раціональних чисел, то воно має розв'язок і на множині цілих чисел?
6. У якому вигляді можна представити раціональне число через цілі числа? Чи єдиним способом можна записати таке представлення?
7. Яку роль відіграють наслідки 3.1 – 3.3 у шкільному курсі математики? Відповідь підтвердіть відповідним посиланням на підручник з математики.

8. Доведіть правила віднімання, множення й ділення раціональних чисел.

9. Сформулюйте властивості системи раціональних чисел.

10. Нагадаємо, що множини називаються рівнопотужними, якщо між ними можна встановити бієкцію (взаємнооднозначну відповідність). Доведіть, що множини цілих і раціональних чисел рівнопотужні.

11. Доведіть, що множина раціональних чисел зчисленна.

12. Доведіть, що множина раціональних чисел щільна.

13. Проаналізуйте, як у шкільному курсі математики порівнюють два раціональних числа.

14. Який вигляд мають два раціональних числа, якщо їхня різниця дорівнює їхньому добутку?

15. Зобразіть за допомогою кругів Ейлера множини натуральних, цілих і раціональних чисел.

Запитання до колоквіуму
Змістовий модуль 3. Система цілих чисел. Система раціональних чисел

1. Означення системи цілих чисел.
2. Найпростіші наслідки з системи аксіом цілих чисел.
3. Теорема про представлення цілого числа через натуральні.
4. Властивості системи цілих чисел.
5. Обґрунтування правила вибору знаків під час додавання цілих чисел.
6. Обґрунтування вибору знаків під час множення цілих чисел.
7. Теорема про порядок у множині цілих чисел.
8. Несуперечливість системи аксіом цілих чисел.
9. Категоричність системи аксіом цілих чисел.
10. Означення системи раціональних чисел.
11. Найпростіші наслідки з системи аксіом раціональних чисел.
12. Теорема про представлення раціонального числа через цілі числа.
13. Правило додавання раціональних чисел.
14. Правило віднімання раціональних чисел.
15. Правило множення раціональних чисел.
16. Правило ділення раціональних чисел.
17. Порівняння раціональних чисел (3 правила).
18. Теорема про порядок у множині раціональних чисел.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 4.
МНОЖИНА ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ. МНОЖИНА КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

Тема 4.1. Дійсні числа

1. **Необхідність розширення поля раціональних чисел**
2. **Означення системи дійсних чисел**
3. **Властивості дійсних чисел**
4. **Зображення дійсних чисел**

1. Необхідність розширення поля раціональних чисел

Для різноманітних обчислень, розрахунків, вимірювань величин та іншого раціональних чисел цілком досить. Проте для побудови теорій тільки раціональних чисел вже недостатньо. Розглянемо кілька прикладів.

✍ Приклад 4.1. Розглянемо рівняння $x^2 = 2$. Можна сформулювати два запитання: 1) Чи має рівняння розв'язок? 2) Якщо має, то на якій числовій множині?

Відповідь на перше запитання можемо отримати графічно (рис. 4.1). Як бачимо, рівняння має два розв'язки.

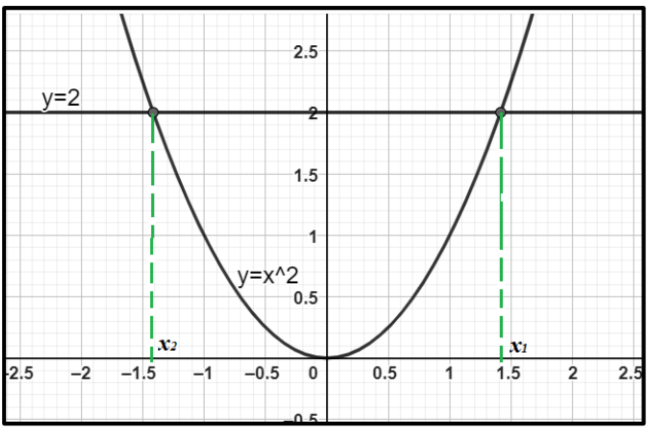


Рис. 4.1. Графічний спосіб розв'язування рівняння $x^2 = 2$

Друге запитання – до якої числової множини належать числа x_1 та x_2? Припустимо, що число $x_1 = \sqrt{2}$ є числом раціональним. Тоді за теоремою 3.7 з врахуванням наслідку 3.1 і того, що $x_1 = \sqrt{2} > 0$, маємо, що $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, де $m, n \in N$, $\text{НСД}(m,n) = 1$. Тоді $\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2 \vdots 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow m \vdots 2$. Отже, $m = 2k, k \in N$. Маємо: $m^2 = 2n^2 \wedge m = 2k \Rightarrow$ $\Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow 2k^2 = n^2 \Rightarrow n^2 \vdots 2 \Rightarrow n \vdots 2$. Тоді $n = 2p, p \in N$. $m = 2k \wedge n = 2p \Rightarrow \text{НСД}(m,n) \geq 2$, що протирічить умові $\text{НСД}(m,n) = 1$. Отже, розв'язки рівняння $x^2 = 2$ існують, але вони не є раціональними числами.

✍ <u>Приклад 4.2.</u> Доведемо, що для будь-якого натурального простого числа *p* і будь-якого натурального $n \geq 2$ число $\sqrt[n]{p}$ не є раціональним.

Припустимо, що число $\sqrt[n]{p}$ – раціональне. Тоді $\sqrt[n]{p} = \frac{r}{s}$, де $r, s \in N$. Піднесемо обидві частини до степеня *n* і маємо: $ps^n = r^n$. Припустимо, що просте число *p* входить у канонічний розклад числа *s* множником *k* разів, у *r* – *l* разів. Тоді в ліву частину рівності $ps^n = r^n$ число *p* входить множником $kn+1$ разів, а в праву *ln* разів. Але $kn+1 \neq ln$ (бо $(ln) \vdots n$, а $\overline{(kn+1) \vdots n}$), що суперечить однозначності розкладання натурального числа у вигляді добутку простих множників. Отже, припущення, що $\sqrt[n]{p} = \frac{r}{s}$ неправильне. Тому число $\sqrt[n]{p}$, де $n \geq 2$ і *p* – просте, не є раціональним.

✍ <u>Приклад 4.3.</u> Ще одна задача, для розв'язування якої недостатньо множини раціональних чисел, – вимірювання величин, зокрема вимірювання відрізків. Нагадаємо, відрізки називаються сумірними, якщо їхні величини відносяться як деякі натуральні числа. Решта відрізків називаються несумісними. Про існування несумірних відрізків було відомо ще стародавнім грекам. Найпоширеніший приклад несумірних відрізків – сторона квадрата і його діагональ. Для відношення довжин цих відрізків раціональних чисел недостатньо.

Таким чином, алгебричні (приклад 4.1 і 4.2) та геометричні (приклад 4.3) задачі сприяли подальшому розширенню числових множин.

2. Означення системи дійсних чисел

Означення 4.1. Системою дійсних чисел називають архімедівськи впорядковане поле, кожна фундаментальна послідовність елементів якого збігається до елемента цього самого поля, тобто таке поле $\left(R, +, \cdot, 0, 1, >\right)$, для якого виконуються такі властивості (аксіоми поля дійсних чисел):

1) структурні аксіоми A_p;

2) спеціальні аксіоми:

r.1. $\forall a \in R\ \forall b \in R\ (a \neq b \Rightarrow a > b \vee b > a)$;

r.2. $\forall a \in R\ (\overline{a > a})$;

r.3. $\forall a \in R\ \forall b \in R\ \forall c \in R\ (a > b \vee b > c \Rightarrow a > c)$;

r.4. $\forall a \in R\ \forall b \in R\ \forall c \in R\ (a > b \Rightarrow a + c > b + c)$;

r.5. $\forall a \in R\ \forall b \in R\ \forall c \in R\ (a > b \wedge c > 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c)$;

r.6. $\forall a \in R \wedge a > 0\ \forall b \in R\ \exists n \in N\ (n \cdot a > b)$

r.7. Для будь-якої фундаментальної послідовності (a_n) елементів з R існує в R елемент r такий, що $\lim\limits_{n \to \infty}(a_n) = r$.

Зі структурних аксіом маємо, що система дійсних чисел R – поле; з спеціальних аксіом r.1 – r.5, що R – архімедівськи впорядковане поле; з аксіом r.5 і r.6 – поле R дійсних чисел неперервне.

3. Властивості дійсних чисел

Сформулюємо без доведення основні властивості системи дійсних чисел.

Теорема 4.1. Поле дійсних чисел R містить підполе, ізоморфне полю раціональних чисел Q.

Теорема 4.2. У множині дійсних чисел існує корінь будь-якого натурального степеня з довільного дійсного додатного числа.

Теорема 4.3. Поле дійсних чисел можна впорядкувати не більш як одним способом.

Теорема 4.4. Кожне дійсне число є границя послідовності раціональних чисел.

4. Зображення дійсних чисел

4.1. Нагадаємо, що система числення – це сукупність прийомів та правил для запису чисел знаками (переважно ці знаки називають цифрами). Системи числення є позиційні й непозиційні. У позиційних системах числення одна і та сама цифра у записі числа набуває різних значень залежно від своєї позиції. Кількість цифр у алфавіті позиційної системи числення називають основою системи числення. Це деяке натуральне число p, $p > 1$. У наш час найпоширенішою позиційною системою числення є десяткова система числення. Якщо через a_k позначити цифри позиційної системи числення з основою p, $0 \le a_k < p$, то будь-яке ціле невід'ємне число можна записати у вигляді $\sum_{k=0}^{n} a_k p^k$. У цьому випадку кажуть про системне число.

✍ <u>Приклад 4.4.</u> Натуральне число «двісті сорок дев'ять» у десятковій системі числення можна записати так: $2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$.

Якщо ж мова йде про раціональне число, то його запис у вигляді $r = p^n \sum_{k=0}^{l} a_k p^{-k}$, $0 \le a_k < p$, називають системним дробом. На практиці системний дріб записують у вигляді ланцюжка цифр з однією комою між ними: $a_0 a_1 a_2 \ldots a_n , a_{n+1} a_{n+2} \ldots a_{n+l}$, $0 \le a_k < p$, p – натуральне, $p > 1$.

✍ Приклад 4.5. Запис раціонального числа «одна друга» у вигляді системного дробу: $0 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1}$ або $0,5$.

Теорема 4.5. Нехай $p \ge 2$ – натуральне число. Кожне дійсне число r можна подати і притому єдиним способом у вигляді

$$r = \pm p^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^{-k}$$

причому:

1) якщо $r > 0$, то у правій частині рівності беремо знак «+»,

якщо $r < 0$, то знак «$-$»;

2) якщо $r = 0$, то $n = 0 \wedge \left(\forall k \in N \cup \{0\} \right) \Rightarrow (a_k = 0)$; (15

3) якщо $r \ne 0$, то n і всі a_k – цілі, крім того,

$a_0 > 0 \wedge (\forall k > 0 \Rightarrow 0 \le a_k \le p-1) \wedge \overline{\exists n_0 \forall k > n_0 \; a_k = p-1}$.

(умова неіснування періодичного дробу з періодом p – 1).

Для десяткової системи числення вважають, що $0,99...9... = 0,(9) = 1$.

Таким чином, кожне дійсне число можна зобразити системним дробом. Це зображення єдине, якщо враховувати 3-ій пункт теореми 4.5.

Можливі випадки системного дробу $r = \pm p^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^{-k}$ *:*

1) $a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = 0$ (починаючи з a_{n+1} всі цифри рівні нулю). У цьому випадку це зображення цілого числа;

2) $\exists k \in N \; \forall m > k \; a_{n+m} = 0$ (починаючи з якоїсь цифри після коми, решта цифр рівні нулю). Маємо скінчений системний дріб. Він служить для зображення раціонального числа;

3) починаючи з якоїсь цифри після коми група цифр повторюється. Маємо періодичний (чистий або мішаний) системний дріб. Він служить для зображення раціонального числа;

4) системний дріб нескінченний, жодна група цифр не повторюється. Він є зображенням дійсного числа, яке називається ірраціональним числом.

Таким чином, скінчений системний дріб або нескінченний (але періодичний!) системний дріб служать зображенням раціонального числа, а нескінченний неперіодичний системний дріб є зображенням ірраціонального числа.

✍ <u>Приклад 4.6.</u> Як записати системний періодичний дріб у вигляді частки двох цілих чисел (у вигляді звичайного дробу)? Розглянемо конкретні приклади.

а) Періодичний дріб чистий, тобто та група цифр, яка повторюється, розпочинається одразу після коми. Нехай це $0,232323....=0,(23)$.

1-ий спосіб. $0,232323....=0,(23)=\dfrac{23}{100}+\dfrac{23}{10000}+...=\dfrac{\frac{23}{100}}{1-\frac{1}{100}}=$

$=\dfrac{\frac{23}{100}}{\frac{99}{100}}=\dfrac{23}{99}$ (сума нескінченно спадної геометричної прогресії).

2-ий спосіб. Нехай $0,232323....=x$. Помножимо обидві частини цієї рівності на 100: $23,2323....=100x$ або $23+0,2323....=100x$. Тоді $23+x=100x$. Маємо $x=\dfrac{23}{99}$.

б) Періодичний дріб змішаний, тобто між комою та групою цифр, яка повторюється, є інші цифри. Нехай це $0,2(35)$.

1-ий спосіб. $0,2(35)=\frac{2}{10}+\frac{35}{1000}+\frac{35}{100000}...=\frac{2}{10}+\frac{\frac{35}{1000}}{1-\frac{1}{100}}=$

$=\frac{2}{10}+\frac{35}{990}==\frac{2\cdot 99+35}{990}=\frac{233}{990}$.

2-ий спосіб. Нехай $0,2(35)=x$. Помножимо обидві частини цієї рівності на 10: $2,(35)=10x$ або $2+0,(35)=10x$. Тоді $0,(35)=10x-2$. Тепер помножимо обидві частини рівності $0,2(35)=x$ на 1000 і врахуємо, що $0,(35)=10x-2$:

$$235,(35)=1000x\Rightarrow 235+10x-2=1000x\Rightarrow 233=990x\Rightarrow x=\frac{233}{990}.$$

Нагадаємо правило, відоме з шкільного курсу математики: Щоб перетворити періодичний дріб у звичайний треба у чисельнику дробу записати різницю чисел, перше з яких записане цифрами, що стоять після коми, друге – цифрами, що стоять між комою й періодом; у знаменнику треба записати стільки дев'яток, скільки цифр у періоді, і стільки нулів, скільки цифр між комою й періодом. Записаний таким чином дріб варто скоротити (якщо це можливо).

✍ <u>Приклад 4.7</u>. а) $0,232323....=0,(23)=\frac{23-0}{99}$ (якщо між комою й періодом цифр нема, тобто маємо чистий періодичний дріб, то від'ємник у цьому випадку дорівнює нулю; у знаменнику записали число 99, бо в періоді 2 цифри, нулів не приписали, бо нема цифр між комою й періодом);

б) $0,2(35)=\frac{235-2}{990}=\frac{233}{990}$ (у періоді дві цифри, тому у знаменнику записали дві дев'ятки, між комою і періодом оин знак – тому приписали справа один нуль). Порівняйте одержані результати з результатами у прикладі 4.6.

4.2. Дійсні числа можна зображувати й за допомогою ланцюгових дробів. Нагадаємо основні теоретичні факти з курсу «Алгебра й теорія чисел».

<u>*Означення 4.2.*</u> Запис виду
$$q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\dots\cfrac{}{\dots\cfrac{}{q_{n-1}+\cfrac{1}{q_n}}}}}$$
називають скінченним ланцюговим дробом.

Позначення: $[q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n]$, де q_0 – ціле число, а $q_1, q_2, \ldots, q_n$ – натуральні числа, $q_n > 1$.

У курсі «Алгебра й теорія чисел» було доведено, що будь-яке раціональне число можна зобразити за допомогою скінченного ланцюгового дробу. Нагадаємо, як це можна зробити.

✍ <u>Приклад 4.8</u>. Розглянемо раціональне число, записане нескоротним дробом. Візьмемо для прикладу $\frac{39}{17}$. Виокремимо цілу частину, а дробову частину запишемо у вигляді оберненого дробу: $\frac{39}{17}=2+\frac{5}{17}=2+\cfrac{1}{\frac{17}{5}}$. Тепер виконаємо аналогічну роботу над дробом $\frac{17}{5}$: $\frac{17}{5}=3+\frac{2}{5}=3+\cfrac{1}{\frac{5}{2}}$. Далі аналогічно: $\frac{5}{2}=2+\frac{1}{2}$.

Тепер запишемо все разом:
$$\frac{39}{17}=2+\frac{5}{17}=2+\cfrac{1}{\frac{17}{5}}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\frac{5}{2}}}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}.$$
Короткий запис одержаного ланцюгового дробу $[2,3,2,2]$. Є й інший спосіб – застосування алгоритму Евкліда знаходження найбільшого

спільного дільника двох чисел, тут – НСД(39, 17). Пропонуємо нагадати цей спосіб самостійно.

Означення 4.3. Запис виду

$$q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\dots\,\cfrac{\dots}{q_{n-1}+\cfrac{1}{\dots}}}}$$

називають нескінченним ланцюговим дробом.

Позначення: $[q_0, q_1, q_2, \dots, q_n, ...]$, де q_0 – ціле число, а $q_1, q_2, \dots, q_n, ...$ – натуральні числа.

Означення 4.4. Підхідним дробом *k*-ого порядку до нескінченного ланцюгового дробу $[q_0, q_1, q_2, \dots, q_n, ...]$ називається скінченний ланцюговий дріб $\frac{a_k}{b_k}=[q_0, q_1, q_2, \dots, q_k]$.

Означення 4.5. Нескінченний ланцюговий дріб $[q_0, q_1, q_2, \dots, q_n, ...]$ називається збіжним, якщо послідовність $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ є збіжною, тобто існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\alpha$. Число α називають значенням нескінченного ланцюгового дробу $[q_0, q_1, q_2, \dots, q_n, ...]$.

Позначення: $\alpha=[q_0, q_1, q_2, \dots, q_n, ...]$.

Сформулюємо без доведення таку теорему.

Теорема 4.6. Будь-якому дійсному ірраціональному числу відповідає єдиний нескінченний ланцюговий дріб, що має це число своїм значенням. Навпаки, будь-який нескінченний ланцюговий дріб визначає одне і тільки одне дійсне ірраціональне число.

Отже, будь-яке дійсне число можна записати ланцюговим дробом: раціональне число – скінченним ланцюговим дробом, ірраціональне – нескінченним ланцюговим дробом.

✍ <u>Приклад 4.9</u>. Розглянемо найпростіший приклад – представлення у вигляді ланцюгового дробу квадратичної ірраціональності. Візьмемо число $\sqrt{5}$. Маємо: $\sqrt{5}=2+\varepsilon_0=2+\dfrac{1}{\dfrac{1}{\varepsilon_0}}=2+\dfrac{1}{q_1}, q_1=\dfrac{1}{\varepsilon_0}$, де $0<\varepsilon_0<1$, тому $q_1>1$. З рівності $\sqrt{5}=2+\dfrac{1}{q_1}$ обчислимо цілу частину числа q_1: $\dfrac{1}{q_1}=\sqrt{5}-2\Rightarrow q_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}=\dfrac{\sqrt{5}+2}{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)}=\sqrt{5}+2=4+\dfrac{1}{q_2}$.

Отже, на цьому етапі $\sqrt{5}=2+\dfrac{1}{q_1}=2+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{q_2}}$. З рівності $\sqrt{5}+2=4+\dfrac{1}{q_2}$ обчислимо цілу частину числа q_2: $\sqrt{5}-2=\dfrac{1}{q_2}\Rightarrow q_2=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}=q_1$. Як бачимо, далі числа будуть повторюватися. Маємо: $\sqrt{5}=\left[2,4,4,...\right]$ або $\sqrt{5}=\left[2,(4)\right]$.

Мають місце такі теореми.

Теорема 4.7. (теорема Лагранжа про квадратичну ірраціональність). Кожна дійсна квадратична ірраціональність розкладається в періодичний ланцюговий дріб.

Теорема 4.8. Кожен періодичний ланцюговий дріб є розкладом деякої дійсної квадратичної ірраціональності.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОТРОЛЮ

1. Сформулюйте означення системи дійсних чисел. Випишіть аксіоми поля у явному вигляді.
2. Що означає: «$(R,\ +,0)$ – адитивна група дійсних чисел»?
3. Що означає «$\left(R\setminus\{0\},\ \cdot,1\right)$ – мультиплікативна група дійсних чисел»?

4. Назвіть причини, які привели до необхідності розширення поля раціональних чисел.

5. Наведіть приклад рівняння виду $x^n = b, n \in N, n > 1$, яке: а) має розв'язки на множині дійсних чисел і не має розв'язків на множині раціональних чисел; б) має розв'язки і на множині дійсних чисел, і на множині раціональних чисел; в) має розв'язки на множині раціональних чисел і не має розв'язків на множині дійсних чисел.

6. Як пов'язані дійсні числа з раціональними?

7. Чи єдиним чином можна представити дійсне число? Відповідь обґрунтуйте.

8. Запишіть числа у вигляді ланцюгових дробів: а) 9,12777….; б) $\sqrt{6}$.

9. Запишіть числа у вигляді системних дробів: а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{7}{16}$; в) $\frac{2}{15}$.

10. Зобразіть за допомогою кругів Ейлера множини натуральних, цілих, раціональних і дійсних чисел.

Тема 4.2. Комплексні числа

1. **Аксіоми комплексних чисел і деякі наслідки з них**
2. **Властивості комплексних чисел**
3. **Властивості системи аксіом комплексних чисел**

1. Аксіоми комплексних чисел і деякі наслідки з них

Означення 4.6. Системою комплексних чисел називають поле (C, +, $\cdot$, 0, 1, i, R), для якого справджується такі властивості (аксіоми поля комплексних чисел):

1) структурні аксіоми A_p;

2) спеціальні аксіоми:

с.1) (R, +, $\cdot$, 0, >) – поле дійсних чисел;

с.2) $R \subset C$;

с.3) $i \in C \wedge i^2 + 1 = 0$;

с.4) Аксіома мінімальності. Нехай $M \subset C$ і виконуються такі властивості:

а) $R \subset M$; б) $i \in M$;

в) $\forall z_1 \in M \ \forall z_2 \in M \ (z_1 + z_2 \in M \wedge z_1 \cdot z_2 \in M)$. Тоді $M = C$.

Аксіоми групи A_p характеризують систему C як поле, аксіоми с.1-с.2 як розширення поля дійсних чисел R, а аксіома мінімальності стверджує, що поле C є мінімальним розширенням поля дійсних чисел. З аксіоми с.3 слідує, що число i є розв'язком рівняння $x^2 + 1 = 0$, тоді можна записати, що $i^2 = -1$ або $i = \sqrt{-1}$.

Властивості комплексних чисел були сформульовані й доведені під час вивчення ОК «Комплексний аналіз» (повторіть їх!). Окремі з них нагадаємо у наступному пункті.

2. Властивості комплексних чисел

Теорема 4.9. Кожне комплексне число z можна подати, і тільки одним способом, у вигляді $z = a + bi, a, b \in R$.

• Доведення. Позначимо через M множину тих чисел, які можна подати у вигляді $z = a + bi, a, b \in R$. Тоді $R \subset M$, бо кожне дійсне число $a = a + 0 \cdot i$. Крім того, $i \in M$, бо $i = 0 + 1 \cdot i$. Нехай $z_1 = a + bi \in M \wedge z_2 = c + di \in M$. Оскільки система комплексних чисел є полем, то

$$\left(a+bi\right)+\left(c+di\right)=\left(a+c\right)+\left(b+d\right)i$$

$$\left(a+bi\right)\cdot\left(c+di\right)=\left(ac-bd\right)+\left(ad+bc\right)i.$$

Отже, $z_1 + z_2 \in M \wedge z_1 \cdot z_2 \in M$. Тоді за аксіомою мінімальності $M = C$. Таким чином, можливість подання кожного комплексного числа у вигляді $z = a + bi, a, b \in R$ доведено.

Доведемо, що таке подання однозначне (методом від супротивного). Нехай $z \in C$ подано у вказаному вигляді двома способами: $z = a + bi = c + di$, де a, b, c, d – дійсні числа. Використовуючи властивості поля, маємо, що $a - c = \left(d - b\right)i$. Якщо $b \neq d$, то $i = \dfrac{a-c}{d-b} \in R$, що неможливо, бо в упорядкованому кільці K $a \in K \wedge a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$, а $i^2 = -1 < 0$. Отже, $b = d$ і $a = c$, тобто вказане подання комплексних чисел єдине. ■

З теореми маємо такі наслідки:

Наслідок 4.1. (умова рівності двох комплексних чисел). Нехай $z_1 = a + bi$ і $z_2 = c + di$. Тоді $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$.

Наслідок 4.2. (правило додавання двох комплексних чисел). Нехай $z_1 = a + bi$ і $z_2 = c + di$. Тоді

$$z_1+z_2=\left(a+bi\right)+\left(c+di\right)=\left(a+c\right)+\left(b+d\right)i.$$

Наслідок 4.3. (правило множення двох комплексних чисел). Нехай $z_1 = a + bi$ і $z_2 = c + di$. Тоді

$$z_1\cdot z_2=\left(a+bi\right)\cdot\left(c+di\right)=\left(ac-bd\right)+\left(ad+bc\right)i.$$

Теорема 4.10. Поле комплексних чисел не можна впорядкувати.

• Доведення. У впорядкованому кільці сума квадратів скінченої кількості відмінних від нуля елементів додатна, тоді як у кільці комплексних чисел маємо: $i^2+1=0$, хоча $i\neq 0 \wedge 1\neq 0$. Теорему доведено. ■

Теорема 4.11. Адитивну групу комплексних чисел можна лінійно і строго впорядкувати.

• Доведення. Адитивна група комплексних чисел – це алгебраїчна структура (*C*, +) (група комплексних чисел відносно операції додавання). Нехай $k_1=a+bi$, $k_2=c+di$ – комплексні числа. Введемо на множині *C* відношення ρ за таким правилом: $(a+bi)\rho(c+di)\Leftrightarrow(a>c\vee(a\ =\ c\Rightarrow b>d))$. Це відношення є антирефлексивним, антисиметричним, транзитивним, зв'язним і монотонним відносно додавання, тобто є відношенням лінійного і строгого порядку. Доведемо, наприклад, монотонність відносно додавання (решту властивостей пропонуємо читачам довести самостійно). Справді, нехай $(a+bi)\rho(c+di)$ і $m+ni$ – якесь комплексне число. Можливі два випадки:

1) $a>c$. Тоді $((a+bi)+(m+ni))\rho((c+di)+(m+ni))$, бо $a+m>c+m$, оскільки відношення > монотонне відносно додавання дійсних чисел;

2) $a=c$. Тоді за умовою (правило, за яким ввели відношення ρ) $b>d$ і знову $((a+bi)+(m+ni))\rho((c+di)+(m+ni))$, бо $b+m>d+m$. ■

Підкреслимо, що впорядкування поля (кільця) і впорядкування його адитивної групи – це не одне й те саме.

Низку інших властивостей множини комплексних чисел було сформульовано й доведено в курсі «Алгебра й теорія чисел», повторено в курсі «Комплексний аналіз».

3. Властивості системи аксіом комплексних чисел

Теорема 4.12. Система аксіом комплексних чисел несуперечлива.

• З доведенням можна ознайомитися в [1]. ■

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОТРОЛЮ

1. Сформулюйте означення системи комплексних чисел. Випишіть аксіоми поля у явному вигляді.

2. Що означає: «$(C, +, 0)$ – адитивна група комплексних чисел»?

3. Що означає «$\left(C\setminus\{0\}, \cdot, 1\right)$ – мультиплікативна група комплексних чисел»?

4. Назвіть причини, які привели до необхідності розширення поля дійсних чисел.

5. Наведіть приклад рівняння виду $x^n = b, n \in N, n > 1$, яке: а) має розв'язки на множині комплексних чисел і не має розв'язків на множині дійсних чисел; б) має розв'язки і на множині дійсних чисел, і на множині комплексних чисел; в) має розв'язки на множині дійсних чисел і не має розв'язків на множині комплексних чисел.

6. Як пов'язані комплексні числа з дійсними?

7. Чи єдиним чином можна представити комплексне число? Відповідь обґрунтуйте.

8. Сформулюйте й доведіть правило віднімання комплексних чисел.

9. Сформулюйте й доведіть правило ділення комплексних чисел.

10. Запишіть і доведіть формулу Муавра.

11. Доведіть, що введене в теоремі 4.11 відношення є антирефлексивним, антисиметричним, транзитивним, зв'язним.

12. Чи можна порівняти два комплексних числа? Відповідь обґрунтуйте.

13. Скільки розв'язків у полі комплексних чисел має рівняння $x^n = b, n \in N, n > 1, b \neq 0$? А в полі дійсних чисел?

14. Зобразіть за допомогою кругів Ейлера множини натуральних, цілих, раціональних, дійсних і комплексних чисел.

15. Проаналізуйте, як у шкільному курсі математики вводиться поняття комплексного числа.

Тема 4.3. Подальші розширення числових множин

1. **Лінійні алгебри скінченного рангу**
2. **Алгебри над полем дійсних чисел**
3. **Теорема Фробеніуса**

1. Лінійні алгебри скінченного рангу

Означення й приклади лінійної алгебри, алгебри з діленням, алгебри рангу *n* над полем наведено в темі 1.3 (прочитайте!).

Теорема 4.13. Нехай (*T*, *P*) – алгебра з діленням над полем *P*. Тоді *T* містить підполе, ізоморфне полю *P*.

• Доведення. Позначимо одиницю тіла *T* через *e*. Тоді множина P_e елементів виду $a \cdot e$, де $a \in P$, є полем, ізоморфним полю *P*. Функцію *f*, яка здійснює ізоморфне відображення поля *P* на множину P_e, можна ввести так: $f(a) = a \cdot e$. Покажіть самостійно, що така функція дійсно здійснює ізоморфізм. ■

Зрозуміло, що саме поле *P* можна вважати підполем алгебри (*T*, *P*). Нагадаємо ще один факт з курсу лінійної алгебри: якщо (*T*, *P*) – алгебра рангу *n* над полем *P*, то будь-які $k > n$ елементів із *T* лінійно залежні над *P*.

Теорема 4.14. Нехай (*T*, *P*) – алгебра рангу *n* над полем *P*. Тоді будь-який елемент $\alpha \in T$ є коренем многочлена степеня не вище *n* над полем *P*.

• Доведення. Нехай $\alpha \in T$. Тоді елементи $\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$ також належать *T*. За теоремою 4.13 елементи тіла *T* $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$ – лінійно залежні над полем *P*. Отже, існують такі числа $c_0, c_1, c_2. \ldots, c_n$, які не всі дорівнюють нулю і які задовольняють співвідношення: . $c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \ldots + c_n\alpha^n = 0$ (де 0 – нуль тіла *T*). А це й означає, що елемент $\alpha \in T$ є коренем многочлена $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n$. ■

Теорема 4.15. Над полем ***C*** комплексних чисел немає інших алгебр з діленням скінченного рангу, крім самого поля ***C***.

• Доведення. Доведемо, що будь-який елемент $\alpha \in T$, де (T, C) алгебра з діленням рангу n над полем C, належить полю C. За попередньою теоремою елемент α є коренем многочленна $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n$ над полем C. Многочлен $f(x)$ розкладається у добуток лінійних множників над полем C: $f(x) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \cdot \ldots \cdot \varphi_k(x)$, $k \leq n$. Підставимо в праву частину одержаної рівності $x = \alpha$ і маємо: $\varphi_1(\alpha) \cdot \varphi_2(\alpha) \cdot \ldots \cdot \varphi_k(\alpha) = 0$, тому що α – корінь многочленна $f(x)$. Але алгебра (T, C) не має дільників нуля, отже, принаймні один із співмножників $\varphi_i(\alpha)$ дорівнює нулю. Наприклад, нехай $\varphi_1(\alpha) = 0$. А це означає, що $\alpha \in C$, бо коефіцієнти $\varphi_1(x)$ належать C. ■

Таким чином, щоб отримати щось нове про розширення числових систем, доцільно звернутися до алгебр з діленням над полем дійсних чисел.

2. Алгебри над полем дійсних чисел

Теорема 4.16. Нехай (T, R) – алгебра з діленням рангу n над полем дійсних чисел R. Тоді: 1) будь-який елемент $\alpha \in T$ є коренем незвідного над R многочлена першого або другого степеня; 2) $\overline{\alpha \in R}$ тоді і тільки тоді, якщо α – корінь незвідного над полем R многочлена другого степеня. У цьому випадку існують такі дійсні числа $a \neq 0, c$, що $(a\alpha + c)^2 = -1$; 3) якщо $n = 2$, то алгебра (T, R) ізоморфна полю C комплексних чисел.

• Доведення. Згідно з теоремою 4.13 розглядатимемо поле R дійсних чисел як підалгебру алгебри (T, R). Тоді 1 (одиниця) поля R є також одиницею алгебри (T, R) (див. наприклад, алгебру многочленів, алгебру комплексних чисел).

1) Перша частина теореми випливає з теорем попереднього пункту. У цьому випадку, якщо $\alpha \in T$ є коренем незвідного многочлена першого степеня, то $\alpha \in R$.

2) Нехай $\alpha \in T \wedge \overline{\alpha \in R}$. Тоді знайдуться такі дійсні числа p і q, що $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$, де многочлен $x^2 + px + q$ – незвідний над R, тобто $p^2 - 4q < 0$. Як було доведено раніше, у множині R існує корінь будь-якого степеня з додатного дійсного числа. Тому існує таке дійсне число $b \neq 0$, що $4q - p^2 = \left(\frac{1}{b}\right)^2 = b^{-2}$.

Тоді $q = \frac{b^{-2} + p^2}{4}$. Помножимо обидві частини рівності $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$ на $4b^2$ і виконаємо підстановку $q = \frac{b^{-2} + p^2}{4}$:

$4b^2\alpha^2 + 4b^2 p\alpha + 4b^2 q = 0$; $\quad 4b^2\alpha^2 + 4b^2 p\alpha + 4b^2 \frac{b^{-2} + p^2}{4} = 0$;

$4b^2\alpha^2 + 4b^2 p\alpha + 1 + b^2 p^2 = 0$; $\quad (2b\alpha)^2 + 2 \cdot 2b\alpha \cdot bp + (bp)^2 + 1 = 0$;

$(2b\alpha + bp)^2 + 1 = 0$. Тут в ролі числа a із формулювання теореми виступає число $2b$, в ролі числа c – число bp. Зауважимо, це доведення має конструктивний характер, воно показує, як саме знайти числа a і c.

Навпаки, якщо α – корінь незвідного над полем R многочлена і є такі дійсні числа $a \neq 0$ і c, що $(a\alpha + c)^2 + 1 = 0$, то $\overline{\alpha \in R}$, бо в противному разі це суперечить тому, що в упорядкованому кільці квадрат відмінного від нуля елемента кільця додатний.

3) Нехай алгебра (T, R) має ранг 2 над полем R. Тоді знайдеться такий елемент α, що $\alpha \in T \wedge \overline{\alpha \in R}$. Очевидно, що елементи 1, α лінійно незалежні над R. Тоді для будь-яких дійсних $a \neq 0$ і c елементи 1, $\beta = a\alpha + c$ також лінійно незалежні над полем R. Числа $a \neq 0$ і c виберемо так, щоб $(a\alpha + c)^2 = \beta^2 = -1$. Оскільки елементи 1, β утворюють базис алгебри, то будь-який її елемент σ однозначно зображується у вигляді $\sigma = m + n\beta,\ m, n \in R$. Неважко перевірити, що

відображення *f*: $f\left(m+n\beta\right)=m+ni$ є ізоморфізмом алгебри (*T*, *R*) на поле комплексних чисел. Перевіримо, наприклад, що *f* здійснює ізоморфне відображення відносно операції додавання. Нехай $x, y \in T,\ x=m+n\beta,\ y=r+s\beta$. Маємо: $f\left(x+y\right)=$ $=f((m+n\beta)+(r+s\beta))=f((m+r)+(n+s)\beta)=(m+r)+(n+s)i=$ $=(m+ni)+(r+si)=f\left(x\right)+f\left(y\right)$. (тут операція додавання в алгебрі *T* і в полі *C* позначено одним символом «+»). Аналогічно перевіряються інші властивості, які характеризують ізоморфне відображення. ■

Теорема 4.17. Немає алгебр з діленням рангу $n=3$ над полем дійсних чисел *R*.

• Доведення. Ідея доведення: припустимо, що (*T*, *R*) – алгебра з діленням рангу $n \geq 3$ над полем дійсних чисел *R*, і доведемо, що $n>3$. Використовуючи міркування з доведення попередньої теореми, приходимо до висновку, що можна знайти такі елементи $\alpha, \beta \in T$, що $\alpha^2=\beta^2=-1$, причому елементи 1, *α*, *β* є лінійно незалежними. Покажемо, що тоді елементи 1, *α*, *β*, *αβ* також лінійно незалежні над полем *R*. Припустимо, що елементи 1, *α*, *β*, *αβ* лінійно залежні над полем *R*. Тоді елемент *αβ* є лінійною комбінацією елементів 1, *α*, *β*, тобто існують такі дійсні числа *a*, *b*, *c*, що $\alpha\beta=a+b\alpha+c\beta$. Помножимо обидві частини рівності $\alpha\beta=a+b\alpha+c\beta$ зліва на *α*: $\alpha^2\beta=\alpha a+b\alpha^2+c\alpha\beta$ або, з врахуванням $\alpha^2=-1$ і $\alpha\beta=a+b\alpha+c\beta$, $-\beta=\alpha a-b+c(a+b\alpha+c\beta)$. Спростивши, маємо: $\left(a+bc\right)\alpha+\left(1+c^2\right)\beta+\left(ac-b\right)=0$. Оскільки елементи 1, *α*, *β* – лінійно незалежні, то коефіцієнти мають бути рівні нулю: $ac-b=0, a+bc=0,\ 1+c^2=0$. Проте рівність $1+c^2=0$ для $c \in R$ неможлива. Ця суперечність свідчить про те, що елементи 1, α, *β*, α*β* лінійно незалежні над полем *R* і ранг алгебри (*T*, *R*) більше трьох, а трьом дорівнювати він не може. ■

Отже:

1) алгебри рангу n = 1 над полем R існують, це, наприклад, саме поле R;

2) алгебри рангу n = 2 над полем R також існують, і всі вони ізоморфні полю $\boldsymbol{C}$ комплексних чисел;

3) алгебри рангу n = 3 над полем R немає.

4) відомий приклад алгебри n = 4 над полем R (тіло кватерніонів – див. Приклад 1.33). Отже, такі алгебри існують.

Залишається з'ясувати таке:

1) структуру алгебр рангу n = 4 над полем R;

2) чи існують алгебри рангу n > 4 над полем $\boldsymbol{R}$.

Сформулюємо без доведення такі теореми (доведення можна прочитати в [1]).

Теорема 4.18. Якщо (T, R) – алгебра з діленням рангу $n \geq 4$ над полем R дійсних чисел, а її елементи 1, α, β – лінійно незалежні над полем R, причому $\alpha^2 = \beta^2 = -1$, то $\alpha\beta + \beta\alpha \in R$, тобто число $\alpha\beta + \beta\alpha$ є дійсним.

Теорема 4.19. Будь-яка алгебра з діленням рангу n = 4 над полем R дійсних чисел ізоморфна алгебрі кватерніонів.

Теорема 4.20. Над полем дійсних чисел R немає алгебр з діленням скінченного рангу $n \geq 5$.

3. Теорема Фробеніуса

Лінійні алгебри з діленням ґрунтуються на полі (не обов'язково комутативному полі). Отже, в цих алгебрах повинні виконуватися всі ті основні властивості основних операцій «+» (додавання) і «·» (множення), які спостерігаються в тілах. Збереження основних властивостей операції + труднощів не викликає: воно забезпечується визначенням лінійної алгебри над полем. Інша річ основні властивості операції ·(множення). В алгебрах рангу $n = 4$ уже втрачається комутативність множення, але асоціативність ще зберігається. Говорячи про лінійні алгебри з діленням над полем R дійсних чисел, мають на увазі такі алгебраїчні структури, в яких передусім зберігаються всі основні властивості операції додавання і особливо асоціативність множення, тобто асоціативні структури.

Теорема 4.21. (теорема Фробеніуса). Над полем *R* дійсних чисел немає інших лінійних асоціативних алгебр з діленням скінченного рангу *n*, крім:

1) комутативних алгебр рангу $n=1$, ізоморфних полю *R* дійсних чисел;

2) комутативних алгебр рангу $n=2$, ізоморфних полю *C* комплексних чисел;

3) некомутативних алгебр рангу $n=4$, ізоморфних алгебрі кватерніонів.

Звичайно, існують інші лінійні алгебри, навіть алгебри з діленням. Такою є, наприклад, алгебра А. Келі рангу $n=8$, елементи якої називають октавами Келі або восьмимірними числами. Але в цій алгебрі вже втрачаються крім комутативного також і асоціативний закон множення.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОТРОЛЮ

1. Сформулюйте означення лінійної алгебри над полем *P*.
2. Сформулюйте означення алгебри з діленням над полем *P*.
3. Сформулюйте означення алгебри рангу *n* над полем *P*.
4. Які є алгебри з діленням скінченного рангу над полем комплексних чисел?
5. Яким може бути ранг лінійних алгебр з діленням над полем дійсних чисел? Наведіть приклади.
6. Опишіть алгебру кватерніонів (вкажіть її ранг, базис, властивості операцій тощо).
7. Сформулюйте теорему Фробеніуса.
8. Який ранг має алгебра А. Келі? Які властивості цієї алгебри?

Запитання до колоквіуму
Змістовий модуль 4.
Множина дійсних чисел. Множина комплексних чисел

1. Необхідність розширення поля раціональних чисел.
2. Аксіоматичне означення поля дійсних чисел.
3. Властивості дійсних чисел.
4. Властивості системи аксіом дійсних чисел.
5. Зображення дійсних чисел системними дробами. Приклади. Види системних дробів.
6. Зображення дійсних чисел ланцюговими дробами. Приклади.
7. Необхідність розширення поля раціональних чисел.
8. Аксіоми комплексних чисел і деякі наслідки з них.
9. Властивості комплексних чисел.
10. Властивості системи аксіом комплексних чисел.
11. Лінійні алгебри скінченного рангу: означення, теорема про корінь многочлена над полем P.
12. Теорема про існування алгебр скінченного рангу над полем комплексних чисел.
13. Ранг алгебр над полем дійсних чисел.
14. Теорема Фробеніуса.

ДОДАТОК А

Методологічні знання майбутнього вчителя математики з навчальної дисципліни «Числові системи»

Навчальна дисципліна «Числові системи» має пряме відношення до питань логічного обґрунтування математики, а тому відіграє особливу роль у процесі формування методологічних знань і фахового становлення не тільки майбутніх учителів, але й викладачів математики різних закладів освіти.

Предметом вивчення навчальної дисципліни «Числові системи» є аксіоматична побудова основних числових систем: натуральних, цілих, раціональних, дійсних, комплексних чисел.

Основний метод вивчення цієї дисципліни – аксіоматичний метод. Крім основного, варто назвати ще такі методи:

- метод математичної індукції (застосовується, наприклад, для доведення властивостей додавання, множення натуральних чисел);

- метод повної індукції (застосовується, наприклад, для доведення теореми: Для довільних натуральних чисел $a, b \in N$ має місце один і тільки один з таких випадків: I. $a = b$;
II. ($(\exists k \in N)$ $\left(a = b + k\right)$; III. $(\exists l \in N)$ $\left(b = a + l\right)$);

- методи побудови системи дійсних чисел: перетини Дедекінда, теорія Вейєрштрасса (теорія нескінченних десяткових дробів), теорія Кантора (теорія фундаментальних послідовностей), теорія Колмогорова-Кавун (за якого дійсні числа вводяться безпосередньо слідом за цілими. Теорія раціональних чисел не передбачається заздалегідь побудованою) – конструктивні методи; аксіоматичний метод;

- метод граничного переходу (застосовується для введення дійсного числа, для доведення теореми про можливість зображення ірраціонального числа нескінченним ланцюговим дробом).

Під час вивчення навчальної дисципліни «Числові системи» відбувається узагальнення, розширення систематизація і повне обґрунтування знань студентів про два важливі принципи математики:

1. Принцип математичної індукції.
2. Принцип побудови розширення числових систем.

Загальновідомо, що на практиці мають місце два основні методи побудови розширення числової системи – аксіоматичний метод і конструктивний метод. Варто зауважити, що у шкільному курсі математики використовується другий із них – конструктивний. А під час вивчення курсу «Числові системи», як правило, використовується аксіоматичний метод побудови розширення числових систем. Майбутні вчителі математики повинні володіти обома методами, розуміти різницю між ними та знати, в яких умовах кожен із методів можна застосувати.

Крім того, аксіоматична теорія натуральних чисел, а значить і всіх решти числових систем, – напівформальна. Це означає, що прямих означень основні поняття не мають, опосередковано вони означаються через систему аксіом. В останніх фіксуються властивості, відношення та зв'язки основних об'єктів теорії. Логічні засоби, які використовуються для доведень тверджень, не описуються в жодній формі. Наприклад, це аксіоматичне означення системи натуральних чисел через аксіоми Пеано.

Варто зауважити, що це не єдина система аксіом натуральних чисел, існують інші, які рівносильні між самою (див., наприклад, [3], [10]). Важливо розуміти, що твердження, які в одній системі аксіом є аксіомами, в іншій будуть теоремами, а, значить, повинні бути в тій іншій аксіоматичній теорії доведені.

Знайшли своє відображення під час вивчення розглядуваного курсу елементи методологічних знань філософського і загальнонаукового рівнів, зокрема:

I. *Методологічні знання філософського рівня*:

а) існування і єдиність. Теореми про існування і єдиність суми, різниці, добутку, частки двох чисел (натуральних, цілих, раціональних, дійсних, комплексних), питання про єдиність зображення (позначення) чисел, теореми про єдиність упорядкування числових множин тощо;

б) дискретність і неперервність. Ці поняття можна проілюструвати на числових множинах (дискретність множини натуральних і цілих чисел та неперервність множини дійсних чисел);

в) скінченність і нескінченність. Основні числові множини (натуральні, цілі, раціональні, дійсні, комплексні числа) – нескінченні, але ця нескінченність «різна»: множини натуральних, цілих, раціональних чисел – зчисленні, дійсних та комплексних – незчисленні;

г) логічне та історичне. Історично розвиток поняття числа відбувався за схемою $N \subset N_0 \subset Q^+ \subset Q \subset R \subset C$, логічно вивчати – $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$;

д) істина. Як зазначалося раніше, математика має свій критерій істинності: виводимість, послідовне використання дедуктивного методу доведення тверджень. Побудова теоретичного курсу навчальної дисципліни «Числові системи» задовольняє цей критерій: під час вивчення дисципліни доводяться навіть «очевидні» для студентів факти, наприклад, $2+2=4$ (та й ще не одним способом).

II. *Методологічні знання загальнонаукового рівня*:

а) метод моделювання (застосовується, наприклад, для доведення незалежності системи аксіом Пеано, для доведення категоричності аксіоматичних теорій числових систем);

б) метод аналогій (наприклад, аксіоматичні означення цілих, раціональних, дійсних, комплексних чисел вводяться аналогічно: формулюються структурні аксіоми (кільця чи поля), а далі – спеціальні аксіоми);

в) індукція та дедукція (взаємозв’язок цих методів яскраво проявляється під час доведення тверджень методом математичної індукції – на першому етапі маємо індуктивні міркування, але в цілому це дедуктивне міркування, бо опирається на аксіому. Роль аксіоми індукції саме і полягає в тому, що вона дає змогу за скінченну кількість кроків завершити доведення властивості, характерної для нескінченної множини натуральних чисел);

г) метод узагальнення (наприклад, аксіома мінімальності для кільця цілих чисел є узагальненням аксіоми індукції для множини натуральних чисел);

д) метод абстракції. Число – одна з найперших абстракцій у математиці, причому, якщо натуральне число – це абстракція, то ціле число – це абстракція від абстракції.

Фундаментальні поняття курсу «Числові системи»: алгебраїчна операція, відношення, рефлексивне, симетричне, транзитивне відношення, відношення порядку й еквівалентності, архімедівський порядок, алгебраїчна структура, упорядкована структура, натуральне, ціле, раціональне, ірраціональне, дійсне, комплексне число, кватерніон, алгебра скінченного рангу, комутативна, асоціативна, дистрибутивна алгебраїчна операція.

Фундаментальні теоретичні факти: принцип побудови розширення числової системи, аксіоматичний і конструктивний методи побудови розширення числових систем, аксіоми Пеано; аксіоматичні означення системи натуральних, цілих, раціональних, дійсних та комплексних чисел; властивості операцій додавання, множення, віднімання та ділення у названих числових системах; теореми про представлення цілих чисел через натуральні, раціональних через цілі, дійсних через раціональні, комплексних через дійсні; теорема Фробеніуса.

Фундаментальні відношення: 1) безпосередньо слідувати за, включення множин, рівність множин, відношення порядку, відношення еквівалентності, ізоморфізм. Алгебраїчні операції також можна розглядати як відношення; 2) у процесі вивчення розглядуваного курсу потрібно не тільки продемонструвати, що кожна наступна числова система є мінімальним розширенням попередньої, а й підкреслити, що число ширшої системи можна отримати з чисел попередньої: кожне ціле число є різниця двох натуральних; кожне раціональне число є частка двох цілих; кожне дійсне число є границею фундаментальної послідовності раціональних чисел; кожне комплексне можна представити у вигляді $x+iy$, де x та y – дійсні числа. Крім того, всі розглянуті числові системи мають дві основні комутативні та асоціативні операції – додавання та множення, операція множення дистрибутивна відносно додавання. Майбутній учитель математики має знати, що існує подальше розширення поля комплексних чисел – тіло кватерніонів. Але для побудови такого розширення прийшлося відмовитися від властивості комутативності множення.

Зв'язок з математичними дисциплінами. Поняття числа є основою, фундаментом вивчення всіх математичних (і не тільки) дисциплін. Крім того, несуперечливість всієї математики зводиться до несуперечливості арифметики натуральних чисел.

Назвемо основні зв’язки навчальної дисципліни «Числові системи» з математичними дисциплінами. Для вивчення вказаної дисципліни необхідні знання з:

1) *Математичного аналізу*: множина, операції над множинами, скінченні, зчисленні множини, функція, фундаментальна послідовність, границя послідовності, норма, послідовності в нормованих просторах. У той же час поняття числа лежить в основі обґрунтування теорії границь.

2) *Алгебри і теорії чисел*: алгебраїчна операція, алгебраїчні структури, ланцюгові дроби та їхні властивості, підхідний дріб.

3) *Математичної логіки та теорії алгоритмів*: логічні операції, логічні закони, аксіоматична теорія, властивості системи аксіом, поняття алгоритму (наприклад, алгоритм зображення квадратичної ірраціональності ланцюговим дробом).

Знання, отримані студентами під час вивчення дисципліни «Числові системи», необхідні для вивчення:

1) *Елементарної математики*: знання про числові множини необхідні практично для вивчення всіх змістових модулів цієї навчальної дисципліни. Наприклад, без знання властивостей множин натуральних та дійсних чисел студенту важко

зрозуміти, що функції $y=x^2, x\in N$, $y=x^2, x\in R$, $y=x^2, x\in\left[-2;2\right]$, $y=x^2, x\in\left[-2;2\right]\cap N$ є різними.

2) *Методики навчання математики*: даний курс є теоретичною базою для розширення поняття числа в шкільному курсі математики.

Історія розвитку. Історія науки дозволяє прослідкувати шлях виникнення та розвитку певного поняття чи теорії. Оскільки розглядувана навчальна дисципліна вивчає числові системи, то в першу чергу треба наголосити, що ідея розширення поняття числа послідовно розвивається в шкільному курсі математики за історичною схемою розвитку цього поняття, а саме: $N\subset N_0\subset Q^+\subset Q\subset R\subset C$. Що стосується курсу «Числові системи», то порядок введення числових систем інший: $N\subset Z\subset Q\subset R\subset C$.

Наведемо основні історичні факти, з якими доцільно ознайомити студентів під час вивчення дисципліни «Числові системи» (табл. А.1).

Таблиця А.1

Основні етапи розвитку числових систем

Вчені, школи	Ідеї	Століття, роки
Я. Відман	Вперше записав додатні та від'ємні числа із знаками «+» та «-» відповідно.	Кінець XV ст.
Д. Кардано, Р. Бомбеллі	Поява комплексних чисел в алгебрі.	XVI - XVII ст.
І. Бернуллі, Г. Лейбніц	Поява комплексних чисел в аналізі.	Початок XVIII ст
Ж. Ліувілль	Доведено існування трансцендентних чисел.	1844 р.
Г. Кантор	Довів незчисленність множини трансцендентних чисел.	60-і роки XIX ст.
Ж. Ерміт	Довів трансцендентність числа *e*.	1873 р.
К. Ліндеман	Довів трансцендентність числа π	1882 р.
Р. Дедекінд	Ідеї аксіоматизації системи натуральних чисел, зокрема,	1888 р.

	принцип індукції.	
Д. Пеано	Напівформальна аксіоматична теорія натуральних чисел.	1891 р.
К. Вейєрштрасс, Р. Дедекінд, Г. Кантор, А. Колмогоров, Є. Ремез	Створення теорії дійсних чисел. Побудова розширення поля дійсних чисел до тіла кватерніонів.	Кінець XIX – початок XX ст.

Варто зазначити, що натуральні та додатні раціональні числа були відомі вченим ще в античні часи. Від'ємні раціональні числа, ірраціональні, дійсні та комплексні числа довгий час не визнавалися повноправними.

Детальніше про методологічні знання й вміння майбутніх учителів математики, а також про формування цих знань і вмінь можна прочитати у роботах [2], [5].

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ Й ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Вивальнюк Л. М., Григоренко В. К., Левіщенко С. С. Числові системи. К. : Вища школа, 1988. 272 с.

2. Кугай Н. В. Методологічні знання майбутнього вчителя математики : монографія. Харків: ФОП Панов А. М., 2017. 336 с.

3. Кугай Н. В. Числові системи : навчально-методичний посібник. Глухів : РВВ ГНПУ ім. О. Довженка. 2011. 84 с.

4. Кугай Н. В., Борисов Є. М., Дем'яненко Ю. Ю. Що повинен знати вчитель математики про натуральні числа. Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки. Черкаси, 2014. Випуск 8 (301). С. 62 - 66.

5. Кугай Н.В., Калініченко М.М. Підготовка майбутніх учителів математики: методологічний аспект : монографія. Харків, 2020. 522 с.

6. Кугай Н. В., Борисов Є. М., Шелудько В. І. Основи комплексного аналізу (практикум) : навчально-методичний посібник. Харків : ФОП Панов А. М., 2017. 120 с.

7. Лиман Ф. М. Математична логіка і теорія алгоритмів. Навчальний посібник / Ф. М. Лиман. – Суми: Видавництво «Слобожанщина», 1998. – 152 с

8. Лиман Ф. М. Числові системи. Навчальний посібник Суми : Видавництво "МакДен", 2010. 192с.

9. Попов М. М. Математична логіка: конспект лекцій для студентів механіко-математичного факультету. К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2015. 79 с.

10. Числові системи : навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів / укл. М. О. Медведева, І. М. Білятинська. Умань : Візаві, 2015. 130 с.

11. Шкіль М. І. Математичний аналіз : Підручник : У 2 ч. Київ : Вища школа, 2005. Ч. 1 447 с

.

Електронне видання

Наталія КУГАЙ
Микола КАЛІНІЧЕНКО

ЧИСЛОВІ СИСТЕМИ

Навчальний посібник

Підп. до розповсюдження 25.09.2024.
Формат 60х84/16. Умов. друк. арк. 7,15. Зам. 3490
Видавництво Глухівського національного педагогічного
університету імені Олександра Довженка.
41400, м. Глухів, Сумська обл., вул. Київська, 24,
тел/факс (05444) 2-33-06.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК No678 від 19.11.2001.