Міністерство освіти і науки України
Глухівський національний педагогічний університет
імені Олександра Довженка

О. В. Заїка, Л.Ф. Сухойваненко

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ: ПРАКТИКУМ

Суми – 2025

УДК 514.7 (075.8)
З-17

Рекомендовано до друку Вченою радою Глухівського національного педагогічного університету імені Олександра Довженка (протокол № 12 від 28 травня 2025 року)

Автори:
О.В. Заїка, кандидат педагогічних наук, доцент кафедри фізико-математичної освіти та інформатики Глухівський НПУ імені Олександра Довженка
Л.Ф. Сухойваненко, кандидат педагогічних наук, старший викладач кафедри фізико-математичної освіти та інформатики Глухівський НПУ імені Олександра Довженка

Рецензенти
Г.А. Гай, кандидат педагогічних наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики Національного університету біоресурсів і природокористування України
Г.В. Гоменюк, кандидат педагогічних наук, в.о. завідувача кафедри математики та методики її навчання Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка

Заїка О. В., Сухойваненко Л. Ф.
З-17 Диференціальна геометрія: практикум. / О.В. Заїка, Л.Ф. Сухойваненко. – Суми: ФОП Цьома С.П., 2025. – 168 с.

ISBN 978-617-8095-63-5

У навчальному посібнику розглянуті короткі теоретичні основи освітнього компоненту «Диференціальна геометрія і топологія», приклади розв'язування типових задач курсу, підібрані завдання для проведення аудиторних занять, а також для самостійної підготовки здобувачів освіти. Посібник рекомендується для студентів спеціальності А4 Середня освіта (Математика) усіх форм навчання.

УДК 514.7 (075.8)

© О. В. Заїка, Л. Ф. Сухойваненко, 2025
ISBN 978-617-8095-63-5
© ФОП Цьома С.П., 2025

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА **5**

РОЗДІЛ 1. ПЛОСКІ ТА ПРОСТОРОВІ КРИВІ **10**

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 1

КРИВІ. РІВНЯННЯ ДОТИЧНОЇ ТА НОРМАЛІ. ДОТИЧНА ПЛОЩИНА 10

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 2

ЗВИЧАЙНІ ТА ОСОБЛИВІ ТОЧКИ. КУТ МІЖ КРИВИМИ 28

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 3

АСИМПТОТИ ПЛОСКОЇ КРИВОЇ. ДОВЖИНА ДУГИ ПЛОСКОЇ ТА ПРОСТОРОВОЇ КРИВОЇ 41

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 4

КРИВИНА ПЛОСКОЇ ТА ПРОСТОРОВОЇ КРИВОЇ. СКРУТ ПРОСТОРОВОЇ КРИВОЇ 54

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 5

ДОТИК ПЛОСКИХ КРИВИХ. ОБВІДНА СІМ’Ї КРИВИХ. ЕВОЛЮТА ТА ЕВОЛЬВЕНТА ПЛОСКИХ КРИВИХ 66

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 6

ФОРМУЛИ ФРЕНЕ. СУПРОВОДЖУЮЧИЙ ТРИГРАННИК ФРЕНЕ 80

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 7

ДОСЛІДЖЕННЯ ПЛОСКИХ КРИВИХ 88

РОЗДІЛ 2. ПОВЕРХНІ **99**

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 8

ПОВЕРХНІ В ЕВКЛІДОВОМУ ПРОСТОРІ. ДОТИЧНА І НОРМАЛЬ. ОБВІДНА СІМ’Ї. РЕБРО ЗВОРОТУ 99

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 9

ПЕРША КВАДРАТИЧНА ФОРМА ПОВЕРХНІ ТА ЇЇ ВИКОРИСТАННЯ 113

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 10

ДРУГА КВАДРАТИЧНА ФОРМА ПОВЕРХНІ ТА ЇЇ ВИКОРИСТАННЯ 120

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 11
КЛАСИФІКАЦІЯ ТОЧОК НА ПОВЕРХНІ.
ІНДИКАТРИСА ДЮПЕНА 129
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 12
АСИМПТОТИЧНІ ЛІНІЇ НА ПОВЕРХНІ.
ГЕОДЕЗИЧНА КРИВИНА. ФОРМУЛИ ГАУСА-
ПЕТЕРСОНА-КОДАЦЦИ 136
РОЗДІЛ 3. ЕЛЕМЕНТИ ТОПОЛОГІЇ 144
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 13
ЕЛЕМЕНТИ ТОПОЛОГІЇ 144
**ВИКОРИСТАННЯ GEOGEBRA Й DESMOS ДЛЯ
ПОБУДОВИ КРИВИХ ТА ПОВЕРХОНЬ 163**
ЛІТЕРАТУРА 167

ПЕРЕДМОВА

Мета створення даного навчального посібника – допомогти студентам у засвоєнні освітнього компоненту «Вища геометрія: диференціальна геометрія і топологія».

Диференціальна геометрія – це частина математики, яка вивчає геометричні образи, в першу чергу криві та поверхні, а також сімейства кривих і поверхонь методами аналізу нескінченно малих. Характерним для диференціальної геометрії є те, що вона вивчає перш за все властивості кривих і поверхонь «в малому», тобто, властивості скільки завгодно малих частин кривих і поверхонь.

Зародження диференціальної геометрії пов'язане з розвитком диференціального та інтегрального числення, започаткованого Ісааком Ньютоном та Готфрідом Лейбніцем. Рене Декарт та П'єр Ферма заклали основи аналітичної геометрії, що дозволило описувати геометричні фігури за допомогою рівнянь. Леонард Ейлер зробив значний внесок у розвиток диференціальної геометрії, досліджуючи криві та поверхні в тривимірному просторі. Гаспар Монж вважається одним із засновників диференціальної геометрії як самостійної дисципліни. Карл Фрідріх Гаусс розробив теорію внутрішньої геометрії поверхонь, що мала великий вплив на подальший розвиток диференціальної геометрії. Розвиток тензорного аналізу дозволив вивчати більш складні геометричні структури, такі як многовиди. Диференціальна геометрія знайшла застосування в багатьох галузях науки та техніки, включаючи фізику, механіку, інформатику та комп'ютерну графіку.

Топологія – розділ математики, що вивчає властивості простору, які зберігаються при неперервних деформаціях, таких як розтягнення, стиснення, згинання, але не розривання або склеювання. Це наймолодша із геометрій.

Перші ідеї, що лежать в основі топології, можна знайти в роботах Леонарда Ейлера. Він досліджував «задачу про Кенігсберзькі мости», яка по суті є топологічною задачею. Карл Фрідріх Гаусс зробив важливий внесок у розвиток топологічних концепцій, особливо в галузі теорії поверхонь. Бернгард Ріман розширив ідеї Гаусса, вводячи поняття ріманових поверхонь, які відіграють ключову роль у топології. Анрі Пуанкаре вважається одним із засновників сучасної топології. Його роботи з аналізом положення та алгебраїчною топологією заклали основи для подальшого розвитку цієї науки. Фелікс Гаусдорф у 1914 році ввів поняття топологічного простору, що стало фундаментальним для сучасної топології. Розвиток теорії множин та абстрактної алгебри сприяв формуванню топології як самостійної дисципліни. У другій половині XX століття топологія знайшла широке застосування в різних галузях науки, включаючи фізику, хімію, біологію та інформатику.

Мета викладання освітнього компоненту: навчити здобувачів освіти досліджувати геометричні властивості кривих, поверхонь за допомогою методів диференціального числення; ознайомити їх з основними характеристиками кривих і поверхонь, топологічними властивостями многовидів; розвинути у майбутнього вчителя математики просторову уяву у взаємозв'язку з методами математичного аналізу, дати глибоку математичну підготовку, яка є необхідною умовою успішного вивчення та викладання математики.

Фундаментальні поняття диференціальної геометрії: вектор-функція, крива, поверхня, дотична пряма та площина, нормальна пряма та площина, кривина, скрут, натуральне рівняння кривої, еволюта та евольвента плоскої кривої; перша та друга квадратичні форми поверхонь; геодезична кривина кривої на поверхні, поверхні постійної гауссової кривини; супроводжуючий тригранник Френе просторової кривої (прямі: бінормаль, головна нормаль, дотична; площини: стична, нормальна, спрямлювана). Головні кривини. Повна і середня кривини поверхонь. Класифікація точок на поверхні (еліптична, гіперболічна, омбілічна, параболічна, точка сплощення); поняття індикатриси Дюпена.

Фундаментальні факти диференціальної геометрії: формули Френе; задання дотичних прямих, нормалі; формули для знаходження кривини плоскої та просторової кривої, обвідної сім'ї плоских кривих, скрута просторової кривої, довжини дуги кривої, обчислення першої та другої квадратичних форм поверхонь, кутів між кривими на поверхні, площ фігур, утворених кривими на поверхні, асимптотичних ліній на поверхні, різні кривини, основні рівняння теорії поверхонь (дериваційні формули, формули Гауса – Петерсена – Кодацці).

Фундаментальні поняття топології: топологічний простір та його об'єкти, окіл, множина (замкнена, відкрита), неперервність, обернене відображення, гомеоморфізм, відделимість, компактність, гаусдорфовий простір, фактортопологія, компактні простори, зв'язні простори, покриття, многовид, сітка. Відображення топологічних просторів; неперервність відображення топологічних просторів в точці та «в цілому»; гомеоморфізм; топологічні властивості; зв’язність; компактність; компоненти топологічного простору, лінійна зв’язність; топологічна розмірність, гаусдорфовість; спадкові топологічні властивості. Локально евклідовий топологічний простір; розмірність топологічного простору; *n*-вимірний топологічний многовид; край многовиду; лист Мьобіуса; тор; пляшка Клейна; модельні поверхні; ручки, трубки, плівки; орієнтованість многовиду; сфери з ручками; сфери з дірками; сфери з плівками; тріангуляції; кліткові розбиття поверхонь; ейлерова характеристика многовиду; правильні многогранники; розгортки поверхонь.

Фундаментальні факти топології: властивості відкритих і замкнених множин в метричному просторі. Властивості внутрішності, замикання та межі множини. Теорема про структуру топологічного підпростору. Теореми про структуру межі та внутрішності множини топологічного простору. Властивості гаусдорфових просторів. Критерій метризованості топологічного простору. Критерій неперервності відображень топологічних просторів «в цілому». Властивості та ознаки неперервних відображень. Властивості гомеоморфізмів. Критерій зв’язності. Властивості компонент зв’язності. Властивості компактних топологічних просторів. Критерій компактності в евклідових просторах. Критерій гомеоморфізму. Теорема про топологічну класифікацію одновимірних многовидів. Теорема про топологічну класифікацію двохвимірних многовидів.

Формула Ейлера. Теорема про класифікацію топологічно правильних многогранників.

У посібнику для кожної теми подаються короткі теоретичні відомості (що розкривають зазначені вище фундаментальні поняття, факти та відношення), які супроводжуються прикладами розв'язування типових завдань. До кожної теми підібрано задачі для самостійного розв'язування. У посібнику розглянуто тринадцять тем практичних занять.

<u>РОЗДІЛ 1</u>

ПЛОСКІ ТА ПРОСТОРОВІ КРИВІ

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 1
КРИВІ. РІВНЯННЯ ДОТИЧНОЇ ТА НОРМАЛІ. ДОТИЧНА ПЛОЩИНА

1. Крива. Способи задання кривої
2. Дотична і нормаль до кривої
3. Дотична площина

Короткі теоретичні відомості

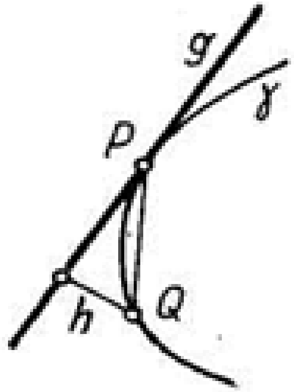
Множина γ точок простору називатиметься **елементарною кривою**, якщо ця множина є образом проміжку при топологічному (взаємно однозначному та взаємно неперервному) відображенні його в простір	Елементарна крива – це те, що ми отримаємо, якщо взяти звичайний відрізок та «вигнути» його у просторі за допомогою топологічного відображення. При цьому не допускається розривати чи склеювати відрізок. В**заємно однозначне** – кожному елементу першого простору відповідає рівно один елемент другого простору, і навпаки. **Неперервне** – відображення зберігає «близькість» точок. Це означає, що близькі точки в

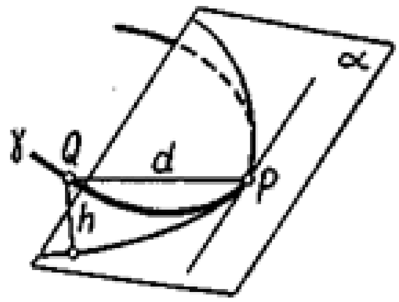
	одному просторі відображаються в близькі точки в іншому просторі. **Обернене відображення також неперервне** – це гарантує, що відображення не тільки зберігає структуру одного простору, але й дозволяє «повернутися» назад без втрати топологічних властивостей
Топологічне відображення – це спосіб деформувати гумову фігуру без розривання або склеювання, так що вона зберігає свою основну форму. Дві фігури, які можна перетворити одна в одну за допомогою такого відображення, вважаються топологічно еквівалентними	
Множина точок вважається **відкритою**, якщо для кожної точки цієї множини існує деяка відстань ε (наскільки завгодно мала), така, що всі точки, які знаходяться від даної точки на відстані меншої за ε, також належать цій множині	Навколо кожної точки відкритої множини можна знайти невеликий окіл, який повністю належить цій множині
Множина точок називається **простою кривою,** якщо вона є суцільною (зв'язною) і в кожній її точці можна знайти такий маленький окіл, що частина кривої, яка потрапляє	Проста крива – це така лінія, яку можна локально (у кожній точці) апроксимувати прямими відрізками. Прикладами є криві, які можна зобразити не відриваючи ручку від паперу,

всередину цього околу, є *елементарною кривою (тобто нагадує маленький відрізок прямої*)	проста крива зв'язна і локально нагадує пряму лінію
Якщо існує неперервне взаємно однозначне відображення (гомеоморфізм) між кривою та колом, то така крива вважається замкнутою	Якщо ми можемо деформувати криву так, щоб вона стала колом, не розриваючи її та не склеюючи різних частин, то таку криву називають замкнутою
Уявимо собі, що ми маємо деяку множину точок M і відображення f, яке переносить кожну точку з M у якийсь інший простір. Якщо навколо кожної точки з M ми можемо знайти такий маленький окіл, що всередині цього околу відображення f працює як звичайне топологічне відображення (тобто зберігає всі топологічні властивості), то таке відображення називають локально топологічним	Уявімо собі поверхню сфери. Якщо ми візьмемо довільну точку на сфері та розглянемо маленький окіл цієї точки, то цей окіл буде дуже схожий на площину. Таким чином, відображення, яке переноситиме точки сфери в площину, буде локально топологічним
Множину γ точок простору називатимемо **загальною кривою**, якщо ця множина є образом простої кривої при локально топологічному відображенні її в простір	Уявімо собі, що ми маємо просту криву (наприклад, відрізок, коло). Якщо ми деформуємо цю криву таким чином, що у кожній маленькій ділянці дефор-

	мація відбувається «красиво» (тобто зберігає всі основні топологічні властивості), то отримана крива буде називатися загальною кривою
Регулярна крива – це крива, яка «гладка» у кожній своїй точці, без різких зламів чи «кутів». Функції $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z=f_3(t)$, які задають криву, повинні мати неперервні похідні до певного порядку k	Уявімо собі криву у просторі. Якщо ми можемо описати будь-яку невелику ділянку цієї кривої за допомогою гладких функцій (тобто таких, які мають неперервні похідні до певного порядку), то таку криву називають регулярною. Це означає, що графіки цих функцій не мають різких зламів чи вертикальних дотичних
Задання просторової кривої	
Векторне	$\vec{r} = \vec{r}\,(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$
Параметричне	$x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$
	$x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z=f_3(t)$
	$x=x$, $y=\varphi(x)$, $z=\psi(x)$
Як перетин двох поверхонь	$\begin{cases} F_1(x,y,z) = 0, \\ F_2(x,y,z) = 0. \end{cases}$
Плоска крива	
Векторне	$\vec{r} = \vec{r}\,(t) = \{x(t), y(t)\}$
Параметричне	$x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$
Явно	$y=f(x)$
Неявно	$F(x,y)=0$

Якщо ми розглядаємо криву в просторі, то кажуть, що вона є **аналітичною**, якщо в будь-якій достатньо малій ділянці цієї кривої ми можемо описати її поведінку за допомогою аналітичних функцій	Аналітична крива – це крива, яка є «дуже гладкою» і не має різких змін напрямку. Аналітична функція – це функція, яку можна розкласти в степеневий ряд в околі кожної точки своєї області визначення. Це означає, що така функція є нескінченно диференційовною і її значення в будь-якій точці можуть бути апроксимовані поліномами
Регулярна крива вимагає лише кінцевої кількості неперервних похідних	Аналітична крива вимагає нескінченно багато неперервних похідних. Тобто аналітична крива є більш гладкою, ніж регулярна крива
Нехай γ – крива, P – точка на ній і g – пряма, що проходить через точку P. Візьмемо на кривій точку Q і позначимо її відстань від точки P і прямої g через d і h відповідно. Ми називатимемо пряму g **дотичною** до кривої γ в точці P, якщо $h/d \to 0$, коли $Q \to P$. Якщо крива γ в точці P має дотичну, то пряма PQ при $Q \to P$ співпадає з цією	Іншими словами, якщо ми будемо зсувати точку Q все ближче і ближче до точки P, то відстань від точки Q до прямої g стане набагато меншою за відстань між точками P і Q. Уявіть собі, що крива γ – це дорога, а точка P – автомобіль на цій дорозі. Пряма g – це напрямок руху автомобіля в точці P. Якщо ми візьмемо інший автомобіль (точка Q) на цій дорозі і

дотичною. І навпаки, якщо пряма PQ при $Q \to P$ збігається з деякою прямою g, то ця пряма є дотичною 	будемо наближати його до першого автомобіля, то бачимо, що відстань від іншого автомобіля до напрямку руху першого автомобіля (h) стає дедалі меншою порівняно з відстанню між автомобілями (d)
Геометричний зміст: дотична до кривої в точці – це пряма, яка найкраще наближає криву в околі цієї точки. Коефіцієнт нахилу дотичної до графіка функції у точці дорівнює значенню похідної цієї функції у цій точці. Одиничний вектор дотичної – $\vec{\tau}$	Дотична показує напрямок, у якому рухається крива в даній точці. Поняття дотичної тісно пов'язане з поняттям похідної
Нехай γ – крива і P – точка на ній, α – площина, що проходить через точку P. Позначимо h відстань довільної точки Q кривої від площини α і d – відстань цієї точки від точки P. Площина α – **дотична площина** кривої γ в точці P, якщо відношення $h\backslash d^2 \to 0$, коли $Q \to P$	Якщо ми будемо зсувати точку Q все ближче і ближче до точки P, то відстань від точки Q до площини α стане набагато меншою за квадрат відстані між точками P і Q. Уявіть собі, що крива γ – це дорога, що проходитиме по гірській місцевості, а точка P – автомобіль на цій

	дорозі. Площина α – дотикається до дороги в точці, де стоїть автомобіль. Якщо ми візьмемо інший автомобіль (точка Q) на цій дорозі і будемо наближати його до першого автомобіля, то видно, що відстань від іншого автомобіля до дороги (h) стає дедалі меншою порівняно з квадратом відстані між автомобілями (d^2)
Кожна пряма, що проходить через точку кривої перпендикулярно дотичній прямій, називається **нормаллю** кривою	**Головна нормаль** – нормаль, що лежить в дотичній площині (одиничний вектор позначимо $\vec{\nu}$), і **бінормаль** – нормаль, перпендикулярна дотичній площині (одиничний вектор позначимо $\vec{\beta}$)
Рівняння дотичної для просторової кривої	
векторно $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$	$\vec{r} = \overrightarrow{r(t)} + \lambda \vec{r}'(t)$
параметрично $x = x(t),\ y = y(t),\ z=z(t)$	$\dfrac{x - x(t)}{x'(t)} = \dfrac{y - y(t)}{y'(t)} = \dfrac{z - z(t)}{z'(t)}$
$x=x,\ y=\varphi(x),\ z=\psi(x)$	$\dfrac{x - x_0}{1} = \dfrac{y - \varphi(x_0)}{\varphi'(x_0)} = \dfrac{z - \psi(x_0)}{\psi'(x_0)}$
як перетин двох поверхонь: $\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$	$\dfrac{x - x_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix}} = \dfrac{y - y_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{vmatrix}} =$ $= \dfrac{z - z_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix}}.$

Рівняння нормальної площини для просторової кривої	
параметрично $x = x(t),\ y = y(t),\ z=z(t)$	$x'(t)\big(x - x(t)\big) + y'(t)\big(y - y(t)\big) +$ $+z'(t)\big(z - z(t)\big) = 0$
як перетин двох поверхонь: $\begin{cases} F_1(x,y,z) = 0, \\ F_2(x,y,z) = 0. \end{cases}$	$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix}(x - x_0) + \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{vmatrix} *$ $*\,(y - y_0) + \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix}(z - z_0) =$ $= 0$
Рівняння дотичної для плоскої кривої	
векторно $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$	$\vec{r} = \overrightarrow{r(t)} + \lambda \vec{r}\,'(t)$
параметрично $x = x(t),\ y = y(t)$	$\dfrac{x - x(t)}{x'(t)} = \dfrac{y - y(t)}{y'(t)}$
явно $y=f(x)$	$y = f(x_0) + f^{/}(x_0)(x - x_0)$
неявно $F(x,y)=0$	$\dfrac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0)} = \dfrac{y - y_0}{-F'_y\big(x_{0,}y_0\big)}$
Рівняння нормалі для плоскої кривої	
параметрично $x = x(t),\ y = y(t)$	$x'(t)\big(x - x(t)\big) + y'(t)\big(y - y(t)\big) =$ $= 0$
явно $y=y(x)$	$y = y(x_0) - \dfrac{1}{y^{/}(x_0)}(x - x_0)$
неявно $F(x,y)=0$	$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) - F'_y\big(x_{0,}y_0\big) *$ $*\,(y - y_0) = 0$
Рівняння дотичної площини для просторової кривої	
векторно $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$	$\big(r - \vec{r}(t),\ \vec{r}\,'(t),\ \vec{r}\,''(t)\big) = 0$
параметрично $x = x(t),\ y = y(t),\ z=z(t)$	$\begin{vmatrix} x - x(t) & y - y(t) & z - z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix} = 0$

Типові завдання

№1. Побудуйте образ кривої

$$x = t^2 - 2t + 3, y = t^2 - 2t + 1.$$

Розв'язання:

Виразимо параметр t через змінні x, y та прирівняємо їх, отримаємо рівняння:

$$x - 3 = y - 1$$

$$x = y + 2,$$

$$y = x - 2.$$

Відповідь: $y=x-2$ – пряма.

№2. Записати рівняння дотичної до кривої в точці $t=1$,

$$x = t^3 - 2t, y = t^2 + 1$$

Розв'язання:

$$\frac{x - x(t)}{x^/(t)} = \frac{y - y(t)}{y^/(t)}.$$

Знайдемо значення функцій в заданій точці.

$$x(1) = 1 - 2 = -1,$$

$$y(1) = 1 + 1 = 2.$$

Знайдемо похідні в заданій точці.

$$x^/{}_t = (3t^2 - 2)|_{t=1} = 1,$$

$$y_t^/ = 2t|_{t=1} = 2.$$

Підставимо знайдені значення в початкову формулу

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2},$$

$$2x + 2 = y - 2,$$

$$2x - y + 4 = 0$$

Відповідь: *2x-y+4=0* – рівняння дотичної в заданій точці.

№3. В якій точці дотична до параболи $y=x^2-6x+5$ перпендикулярна до прямої $x-2y+8=0$.

Розв'язання:

Оскільки прямі перпендикулярні, то виконується умова: $k_1k_2=-1$;

$$2y=8+x,$$

$$y=\frac{8+x}{2}, y=4+\frac{x}{2},$$

$$y=\frac{x}{2}+4,$$

$$k_1=\frac{1}{2}, k_2=-2.$$

Знайдемо кутовий коефіцієнт дотичної до параболи: $y^/=2x-6$. Прирівняємо отримані коефіцієнти:

$$2x-6=-2$$

$$2x=4,$$

$$x=2;$$

$$y=4-12+5=-3.$$

(2;-3) – шукана точка.

Відповідь: (2; - 3).

№4. Знайти рівняння дотичної та нормальної площини до лінії перетину сфери $x^2+y^2+z^2=4$ і циліндра $x^2+y^2=2y$ в точці $A(1;1;\sqrt{2})$.

Розв'язання:

Подамо поверхні як неявно задані:

$F_1=x^2+y^2+z^2-4=0, F_2=x^2+y^2-2y=0.$

Рівняння дотичної:

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z}\\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z}\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial x}\\ \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial x}\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y}\end{vmatrix}}$$

Знайдемо частинні похідні в даній точці:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 2x|_{\mathrm{A}} = 2, \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y|_{\mathrm{A}} = 2, \frac{\partial F_1}{\partial z} = 2z|_{\mathrm{A}} = 2\sqrt{2};$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x|_{\mathrm{A}} = 2, \frac{\partial F_2}{\partial y} = 2y - 2|_{\mathrm{A}} = 0, \frac{\partial F_2}{\partial z} = 0|_{\mathrm{A}} = 0.$$

Маємо:

$$\frac{x-1}{\begin{vmatrix} 2 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{y-1}{\begin{vmatrix} 2\sqrt{2} & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{z-\sqrt{2}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}.$$

$\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{4\sqrt{2}} = \frac{z-\sqrt{2}}{-4}$ – рівняння дотичної.

Помноживши напрямний вектор дотичної на вектор AM, де M – біжуча точка дотичної, отримуємо рівняння нормальної площини:

$0(x\text{-}1)+4\sqrt{2}\,(y\text{-}1)\text{-}4(z-\sqrt{2})=0$,

$\sqrt{2}(y\text{-}1)\text{-}z+\sqrt{2}=0$, $\sqrt{2}y\text{-}z=0$ – рівняння нормальної площини.

Відповідь: $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{4\sqrt{2}} = \frac{z-\sqrt{2}}{-4}$, $\sqrt{2}y\text{-}z=0$.

Зауваження. Для візуалізації даної задачі доречно скористатися програмою GeoGebra 3d. Виконавши в ній побудови поверхонь, отримаємо криву (рис.1.1 а). Поставивши задану нам точку і, побудувавши отримані площину і дотичну пряму, можна переконатися в правильності виконання завдання (рис.1.1 б-г).

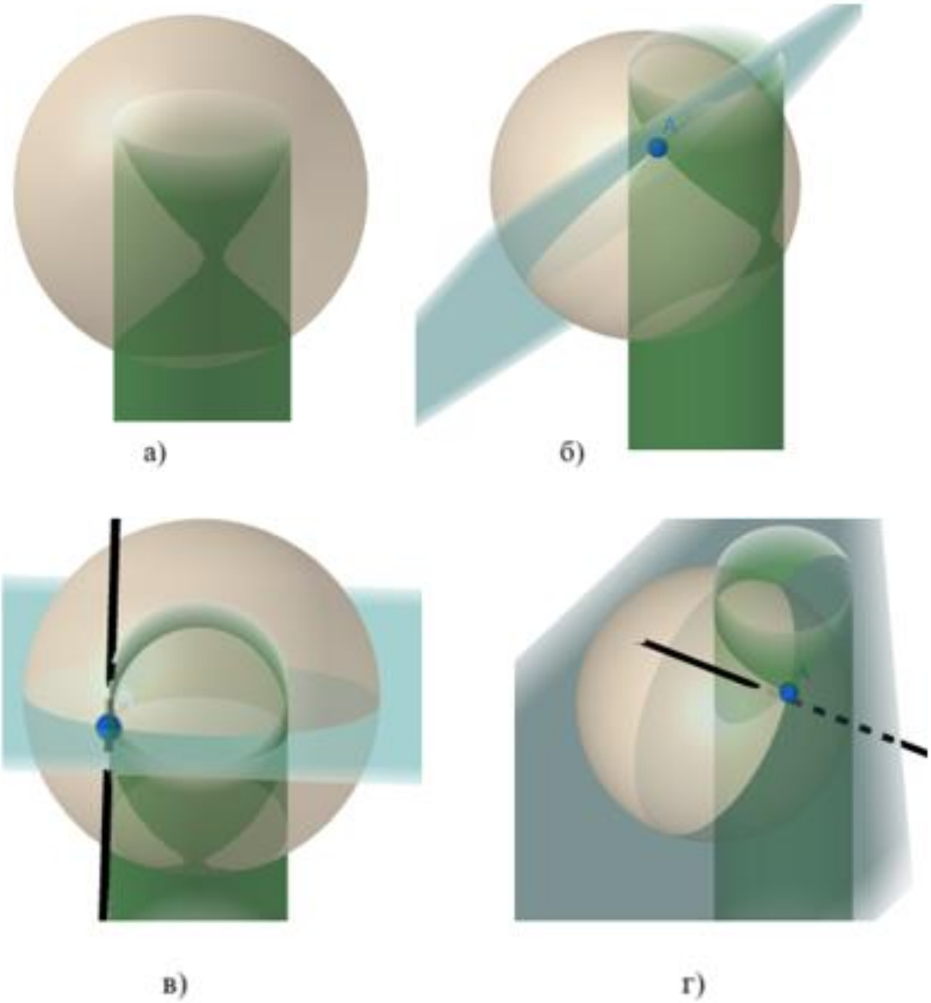


Рис.1.1. Перетин двох поверхонь, дотична і нормальна площина

Завдання для аудиторної роботи

1. Знайти похідну функції однієї дійсної змінної t: $r^2, r^{/2}, \sqrt{r^2}$.

2. Чи можна стверджувати, що для вектор-функції $\vec{r}(t)$ мають місце рівності:

а) $\left|\vec{r}^{/}\right| = |\vec{r}|^{/}$? б) $\vec{r} \cdot \vec{r}^{/} = |\vec{r}| \cdot \left|\vec{r}^{/}\right|$?

3. Доведіть, що образ кривої, яка задана вектор-функцією $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\overrightarrow{r_1} + t^2\overrightarrow{r_2}, t \in R$, де $\overrightarrow{r_0}, \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}$ – постійні вектори, є парабола, якщо вектори $\vec{r}_1, \overrightarrow{r_2}$ – не колінеарні.

4. Доведіть, що образ кривої, заданої вектор-функцією $\vec{r} = \vec{r}_0 + \cos t\,\vec{r}_1 + \sin t\,\overrightarrow{r_2}, t \in [0; 2\pi]$, є еліпс, якщо вектори $\overrightarrow{r_1}, \vec{r}_2$ не колінеарні.

5. Дано криву $x = t^3 - 2t, y = t^2 - 2$. Чи лежать на її образі точки M(-1;-1), N(4;2), P(1;2)? Знайдіть точки перетину образу кривої з координатними осями. Запишіть неявне рівняння образа кривої.

6. Побудуйте образи наступних кривих:

1) $x = t^2 - t + 1, y = t^2 + t + 1$.

2) $x = a\sin^2 t\,, y = b\cos^2 t$.

3) $x = 3^t + 3^{-t}, y = 3^t - 3^{-t}$.

7. Покажіть, що образ кривої $x = at\cos t\,, y = at\sin t$, $z = \frac{a^2t^2}{2p}$ лежить на параболоїді обертання і його проєкція на xOy є спіраллю Архімеда (рис.1.2). Перевірте себе за допомогою платформи GeoGebra 3d. Як залежить розв'язок від параметрів a і p?

8. Подайте образ кривої $x = t, y = t^2, z = e^t$ у вигляді перетину двох поверхонь (рис.1.3).

9. Знайдіть дотичну до кривої $x = t^3, y = t^2$, яка проходить через точку M(-1;1) (рис.1.4).

10. В якій точці дотична до параболи $y=x^2$ утворить з віссю Ox кут 45^0?

11. Складіть рівняння дотичної та нормалі до наступних плоских кривих:

1) $y = x^2 + 4x + 3$ в точках A,B,C з абсцисами -1;0;1.

2) $x = t^3 - 2t, y = t^2 + 1$ в точці A(t=1).

3) $x = a\cos t, y = b\sin t$.

4) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ в точці $A\left(\frac{3a}{2}; \frac{3a}{2}\right)$ (рис.1.5).

5) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

12. Складіть рівняння дотичної прямої та дотичної площини до просторової кривої у вказаній точці:

а) $x = e^t, y = e^{-t}, z = t^2, t = 1$ (рис.1.6)

б) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), z = 2a\sin\frac{t}{2}$ в точці $t = \frac{\pi}{2}$ (рис.1.7).

13. В яких точках дотична до просторової кривої $x = 3t - t^3, y = 3t^2, z = 3t + t^3$ паралельна до площини 3*x*+*y*+*z*+2=0 (рис.1.8)?

14. Складіть рівняння дотичної прямої і нормальної площини гвинтової лінії $x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 4t$ в точці *t*=0 (рис.1.9).

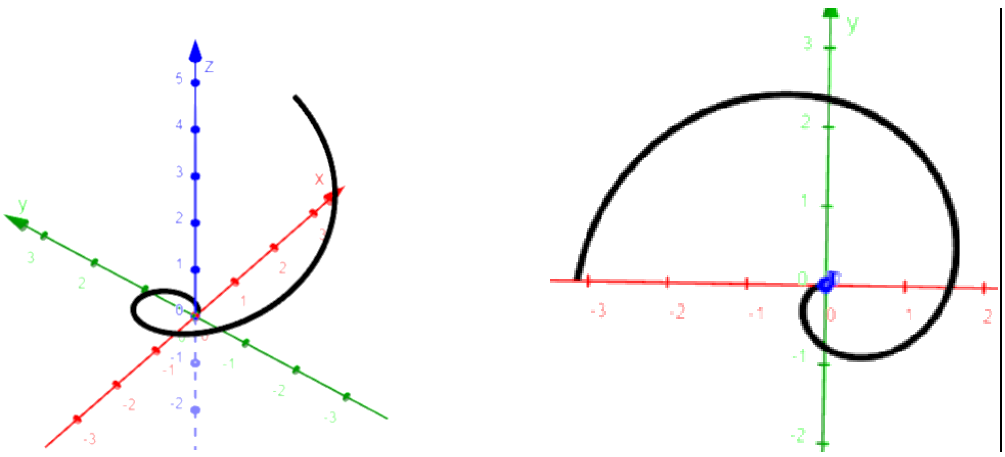


Рис.1.2.

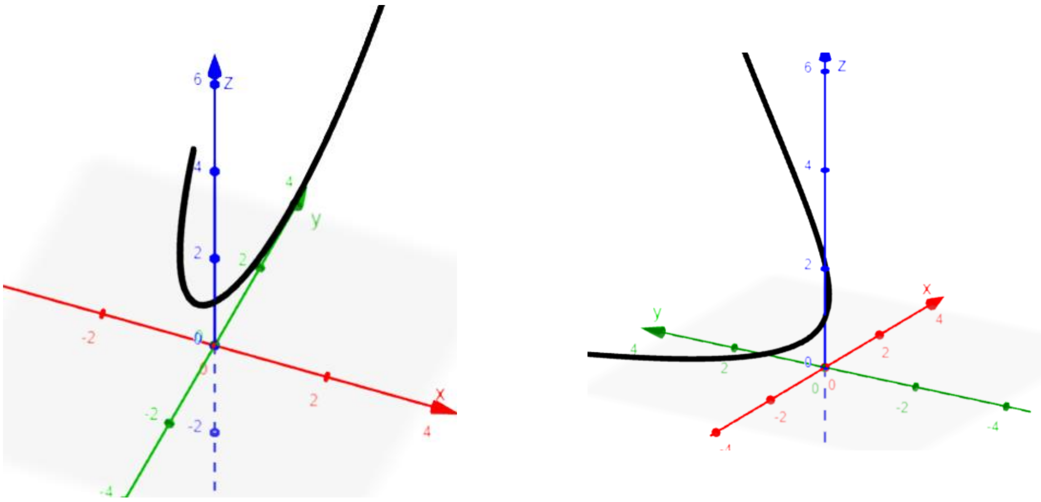


Рис.1.3.

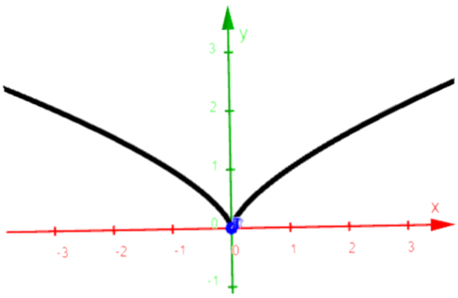


Рис.1.4

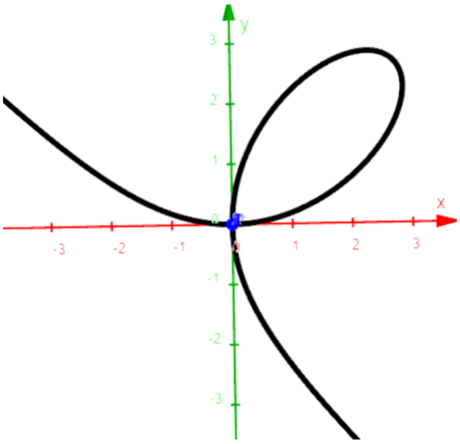


Рис.1.5.

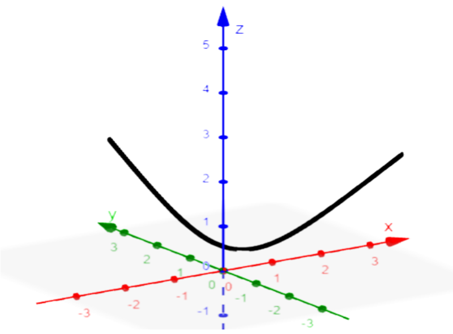


Рис.1.6.

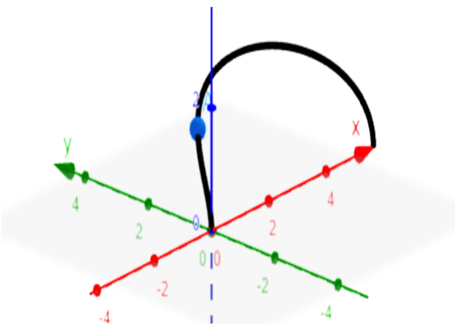


Рис.1.7.

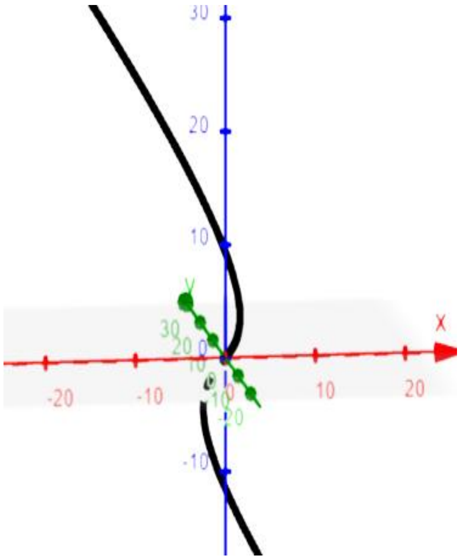


Рис.1.8.

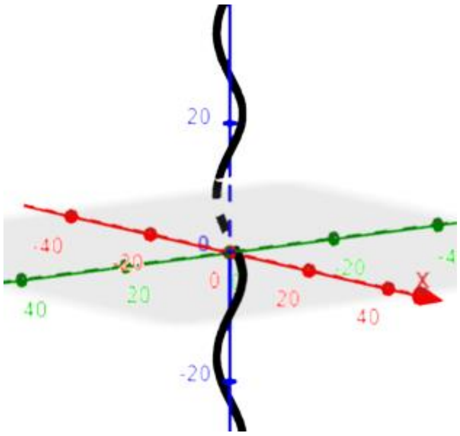


Рис.1.9.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти проєкції гіперболічної гвинтової лінії $\vec{r} = \{acht; asht; ht\}$ на координатні площини.

2. Знайдіть проєкції образу кривої $x = t, y = t^2, z = t^3$ на координатні площини (рис.1.10).

3. Знайти дотичну до Декартового листа $x = \frac{at}{1+t^3}$, $y = \frac{at^2}{1+t^3}$, паралельну бісектрисі *x+y*=0 координатного кута (рис.1.11).

4. Знайти дотичну і нормаль до плоскої кривої, заданої параметричними рівняннями:

а) $\vec{r} = \sin t\, \vec{i} + \cos t\, \vec{j}, t = \frac{\pi}{2}$;

б) $x = a(t - \sin t), y = a(1 + \cos t), t = \frac{\pi}{2}$.

5. Знайти дотичну і нормаль до цисоїди Діоклеса в точці $A(1)$: $x = \frac{a}{1+t^3}, y = \frac{a}{t(t^2+1)}$ (рис.1.12).

6. Знайти дотичну і нормаль до циклоїди *x=a(t-sint), y=a(1-cost)* в довільній точці (рис.1.13).

7. Складіть рівняння дотичної до лінії $\vec{r} = \{t^2, t, e^t\}$, паралельної площині *x*-2*y*-5=0 (рис.1.14 а-в).

8. Напишіть рівняння дотичної прямої і нормальної площини лінії $x^2 = 2az, y^2 = 2bz (y \neq \pm 1)$.

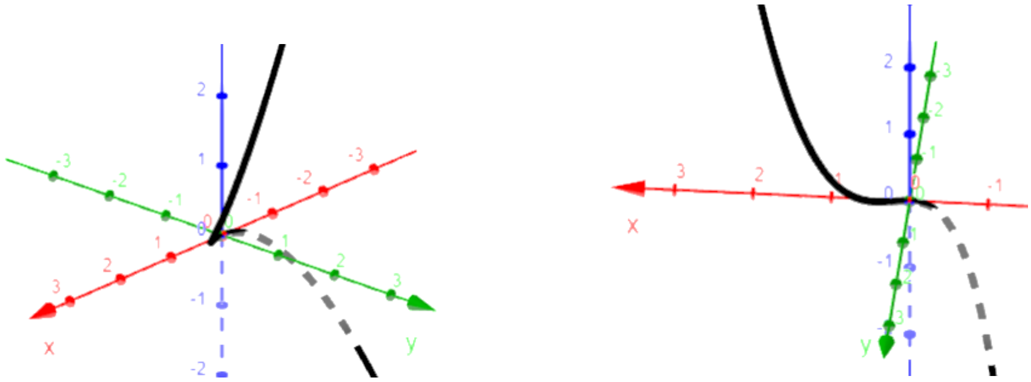


Рис.1.10

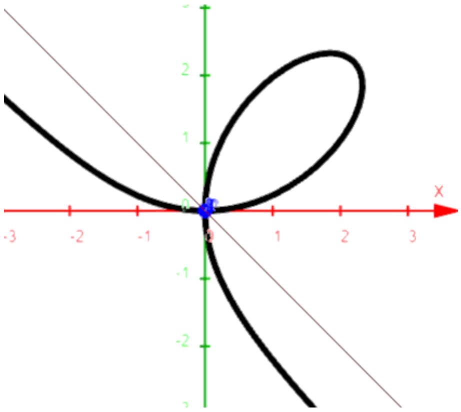


Рис.1.11

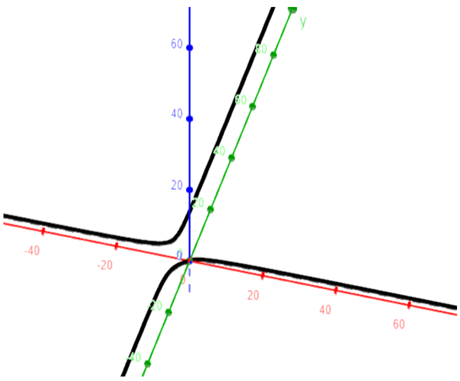


Рис.1.12

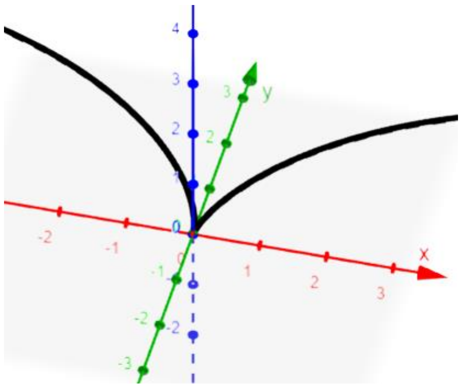
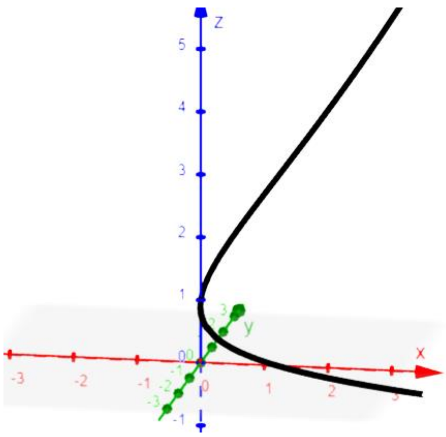
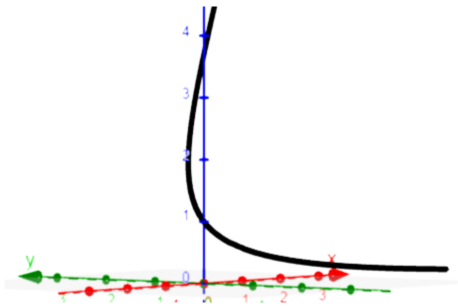


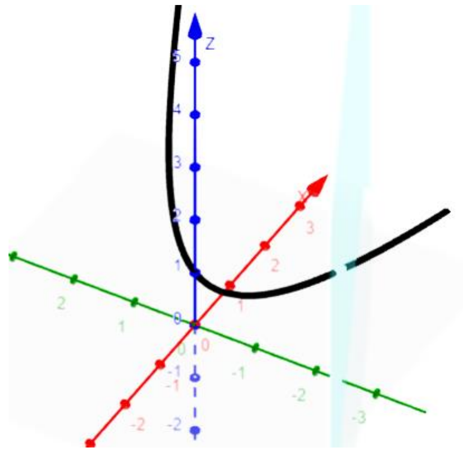
Рис.1.13



а)



б)



в)

Рис.1.14

Відповіді

Завдання для аудиторної роботи

5. γ: $y^3 + 2y^2 - x^2 = 0$, $M\in\gamma$, $N\in\gamma$, $P\notin\gamma$, (0; 0), (0; -2). *6.* 1) $y^2 + x^2 - 2xy - 2y - 2x + 4 = 0$; 2) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$; 3) $y^2 - x^2 + 4 = 0$. *8.* (рис.1.15) $y=x^2$, $z=e^x$. *10.* (0.5; 0,25). *11.* 1) в A: $y=2x+2$, $y=-0.5x-0.5$. 2) $x+1=0.5(y-2)$, $x+2y-3=0$. *12.* $\frac{x-e}{e} = \frac{y-e^{-1}}{-e^{-1}} = \frac{z-1}{2}$; $-4e^{-1}x + 2z + 2 = 0$. *13.* (-2; 3; -4), (-2; 12; 14). *14.* Дотична $\frac{x-2}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z}{4}$, нормаль $y+2z=0$.

Завдання для самостійної роботи

3. $y=-x+a$. *6.* Дотична $\frac{x-a(t-sint)}{a(1-cost)} = \frac{y-a(1-cost)}{asint}$, нормаль $x(a-acost)+yasint+a^2t(cost-1)=0$. *7.* $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-e}{e}$, $t=1$. *8.* (рис.1.16)

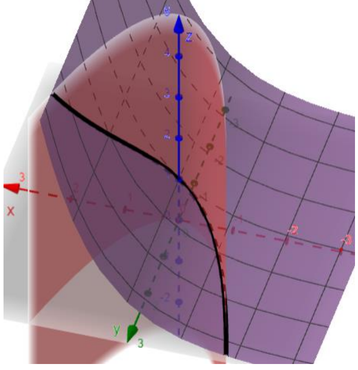


Рис.1.15

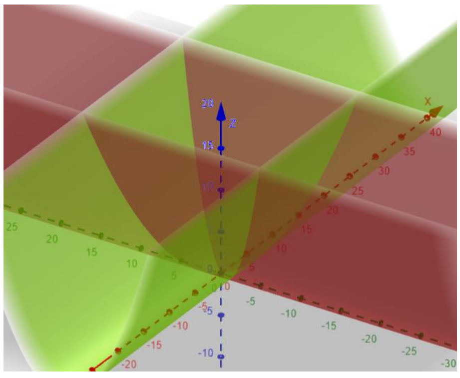


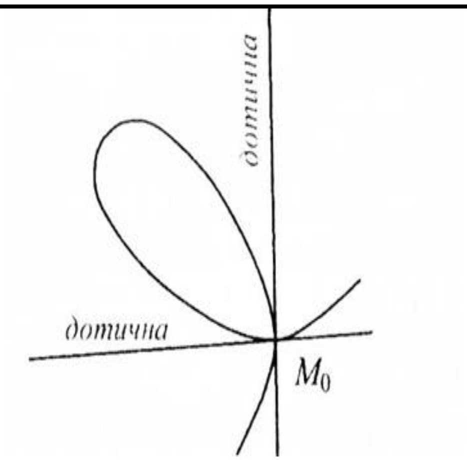
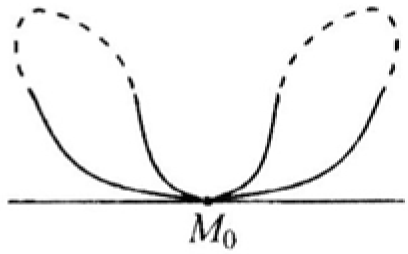
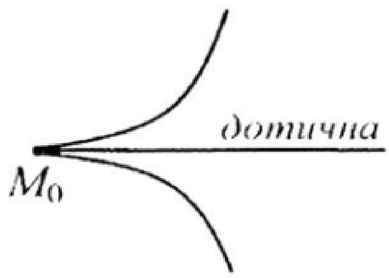
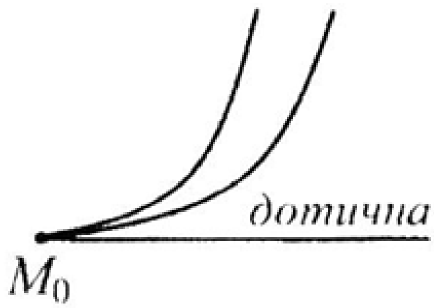
Рис.1.16

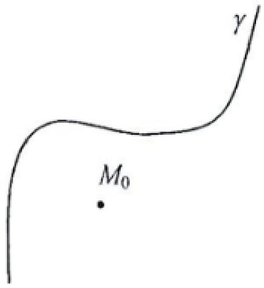
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 2
ЗВИЧАЙНІ ТА ОСОБЛИВІ ТОЧКИ. КУТ МІЖ КРИВИМИ

1. Особливі та звичайні точки плоскої кривої
2. Класифікація особливих точок
3. Кут між кривими

Короткі теоретичні відомості

Крива називається **регулярною**, якщо в кожній її точці існує визначена дотична лінія. **Гладка крива** – це крива, яку можна описати за допомогою функцій, що мають неперервні похідні. Це означає, що дотична до кривої змінюється плавно, без різких стрибків. Крива «гладка» і не має різких поворотів або розривів	**Особлива точка** плоскої кривої – це точка, в якій крива поводить себе не так, як звичайно. Тобто, в цій точці крива втрачає свою «гладкість» або «регулярність». В особливій точці дотична лінія може бути невизначеною, або крива може мати самоперетин або інші незвичайні властивості. Це точка, де крива «ламається», «згортається» або має іншу некоректну поведінку
Точка P кривої γ називається **звичайною** точкою по відношенню до даного ступеня регулярності k, якщо крива допускає k раз параметризацію, що диференціюється, в околі цієї точки $x = x(t)$, $y = y(t)$, що в точці P задовольняє умові: $x^{/2} + y^{/2} \neq 0$.	Для звичайної точки існує така параметризація, що функції $x(t)$ та $y(t)$ мають достатню кількість похідних (k разів диференційовані) в околі цієї точки. В самій точці P похідні $x'(t)$ та $y'(t)$ не можуть одночасно дорівнювати нулю. Це означає, що існує визначений напрямок

Якщо ж такої параметризації не існує, то P називається **особливою** точкою	дотичної до кривої в цій точці. Звичайна точка – це точка, де крива «гладка» і має чітко визначену дотичну
Класифікація особливих точок	
Точки самоперетину (самодотику, вузлові точки)	Крива перетинає саму себе
	
Точки звороту I і II роду	Крива змінює напрямок руху на протилежний
Точка звороту I роду, якщо в досить малому околі цієї точки крива розташовується по обидва боки від дотичної, але по один бік від нормалі	
Точка звороту II роду, якщо в досить малому околі цієї точки крива розташовується по один бік від дотичної і нормалі	

<table>
<tr><td>Вістря
</td><td>Крива закінчується в гострій точці</td></tr>
<tr><td>Ізольовані точки
</td><td>Точка кривої відокремлена від інших точок кривої</td></tr>
<tr><td>Нехай криву γ задано рівнянням F(x,y)=0, а точка M є особливою. Продиференціюємо останню рівність за змінною x (вважаємо, що y=f(x)). Тоді
$$F_x^{/} + F_y^{/} \cdot f^{/} = 0.$$
Оскільки точка M –
особлива, то в цій точці $F_x^{/} = F_y^{/} = 0$
$$F_{xx}^{//} + F_{xy}^{//} \cdot f^{/} + F_{xy}^{//} f^{/} +$$
$$+F_{yy}^{//}\left(f^{/}\right)^2 = 0,$$
$$F_{xx}^{//} + 2F_{xy}^{//} \cdot f^{/} + F_{yy}^{//}\left(f^{/}\right)^2 = 0$$
$$\Delta = \boldsymbol{F_{xy}^{//2}} - F_{xx}^{//} F_{yy}^{//}$$</td><td>Якщо $\Delta > 0$, то крива в точці M₀ має дві різні дотичні, а точка є вузловою.
Якщо $\Delta = 0$, то рівняння має один розв’язок, тому дотичні збігаються. Маємо точки звороту першого або другого роду, або точки самодотику.
Якщо $\Delta < 0$, то рівняння дійсних розв’язків немає, тому крива в точці M₀ немає дотичних. Маємо особливу ізольовану точку</td></tr>
<tr><td colspan="2">Нехай аналітична крива γ в околі точки O є задана рівняннями x = x(t), y=y(t), де x(t) і y (t) – аналітичні функції параметра t. Нехай перші відмінні від нуля похідні функції x(t) і y(t) мають порядки n_1 і m_1 відповідно, причому $n_1 < m_1$.
Точка O буде точкою звороту другого роду, якщо n_1 і m_1 обидва парні, і точкою звороту першого роду, якщо n_1 парне, а m_1 непарне</td></tr>
</table>

Кут між плоскими кривими – це кут між їх дотичними в точці перетину	Зазвичай розглядається найменший з двох можливих кутів між дотичними
Кут між просторовими кривими в точці визначається кутом між дотичними векторами в цій точці	Дотичний вектор до кривої в точці показує напрямок, в якому крива рухається в цій точці. Він обчислюється як похідна параметричного рівняння кривої

Типові завдання

№1. В околі особливих точок визначити форму плоскої кривої $x^3 - 2x^2 - y^2 + x = 0$.

Розв'язання:

Розв'язавши систему

$$\begin{cases} F(x,y) = x^3 - 2x^2 - y^2 + x = 0 \\ F_x^{/}(x,y) = 3x^2 - 4x + 1 = 0 \\ F_y^{/}(x,y) = -2y = 0 \end{cases}$$

переконуємось, що крива має можливу особливу точку $A(1;0)$.

Обчислюємо в цій точці частинні похідні заданої функції другого порядку:

$F_{xx}^{//} = 6x - 4|_{x=1} = 2, F_{xy}^{//} = 0, F_{yy}^{//} = -2$. Визначимо тип цієї точки. Обчислюємо значення дискримінанта: $\Delta = F_{xy}^{//2} - F_{xx}^{//} F_{yy}^{//}$, Δ=4. Тому точка A – вузлова (рис.2.1).

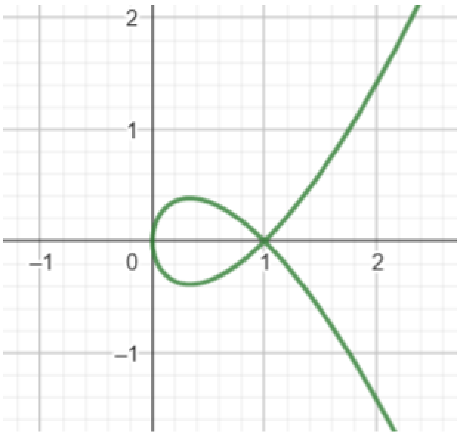


Рис.2.1.

Відповідь: $A(1;\,0)$ – вузлова точка.

№2. Дослідити функцію на особливі точки:

а) $\overline{r} = \{t^2; 15t^4 + 8t^5\}$; б) $x^2y^2 = x^2 + y^2$.

Розв'язання:

а) $\overline{r} = \{t^2; 15t^4 + 8t^5\}$.

Знайдемо похідну даної функції та розв'яжемо отриману систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2t = 0 \\ 60t^3 + 40t^4 = 0 \end{cases}, \begin{cases} t_1 = 0 \\ t^3(60 + 40t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_{1,2} = 0 \\ t_3 = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Підставимо знайдені значення t в умову, отримаємо:

$$\vec{r}(0) = \{0, 0\} \Rightarrow t = o \in \gamma$$

$$\vec{r}\left(-\frac{3}{2}\right) = \left\{\frac{9}{4}, 0\right\} \Rightarrow t = \frac{3}{2} \notin \gamma$$

Отже, точка t=0 – особлива. Знайдемо другу похідну.

$$\vec{r}^{//} = \{2; 180t^2 + 160t^3\}.$$

Підставимо значення особливої точки в знайдену похідну, отримаємо: $\vec{r}^{//} = \{2; 0\}$.

Оскільки перша координата не дорівнює 0, то *n=2*. Знайдемо третю похідну і підставимо в неї значення особливої точки.

$$\vec{r}^{///} = \{0; 360t + 480t^2\}|_{t=0} = \{0, 0\}.$$

Оскільки друга координата дорівнює 0, то знаходимо 4 похідну.

$$\vec{r}^{IV} = \{0; 360 + 960t\}|_{t=0} = \{0, 360\}.$$

Маємо, що друга координата не дорівнює 0, то *m=4.*

Отже, точка *t=0* – точка звороту другого роду (рис.2.2.).

Відповідь: *t=0* – точка звороту 2 роду.

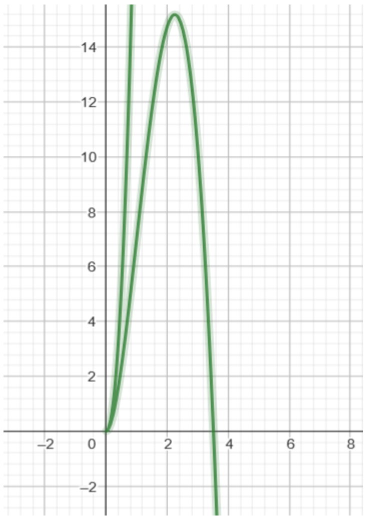


Рис.2.2

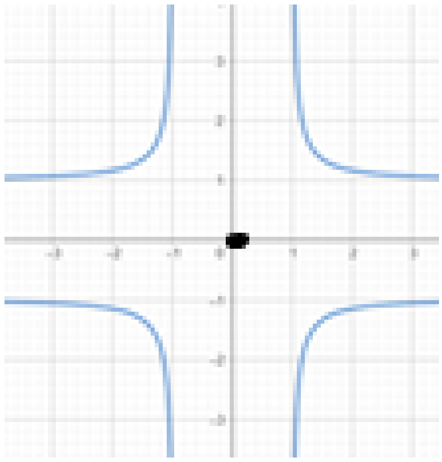


Рис.2.3

б) $x^2y^2 = x^2 + y^2$.

Знайдемо частинні похідні по х та у.

$$F_x^/ = 2xy^2 - 2x,$$

$$F_y^/ = 2yx^2 - 2y.$$

Запишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2xy^2 - 2x = 0; \\ 2yx^2 - 2y = 0. \end{cases}$$

Винесемо в першому і другому рівнянні спільний множник за дужки, отримаємо:

$$\begin{cases} 2x(y^2 - 1) = 0; \\ 2y(x^2 - 1) = 0. \end{cases} \begin{cases} 2x = 0y^2 - 1 = 0; \\ 2y = 0x^2 - 1 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 0, y = \pm 1 \\ y = 0, x = \pm 1. \end{cases}$$

Отже, маємо точки:

$M_1(0;0), M_2(1;1), M_3(-1;-1), M_4(-1;1), M_5(1;-1)$.

Підставимо значення знайдених точок в задану умову.

$$F(M_1) = 0, M_1 \in \gamma;$$
$$F(M_2) = 1 - 1 - 1 = -1 \neq 0, M_2 \notin \gamma;$$
$$F(M_3) = 1 - 1 - 1 = -1 \neq 0, M_3 \notin \gamma;$$
$$F(M_4) = 1 - 1 - 1 = -1 \neq 0, M_4 \notin \gamma;$$
$$F(M_5) = 1 - 1 - 1 = -1 \neq 0, M_5 \notin \gamma.$$

Отже, точка $M_1(0;\ 0)$ – особлива.

Знайдемо частинні похідні другого порядку і їх значення в точці M_1.

$$F_{xx}^{//} = (2y^2 - 2)|_{M_1} = -2;$$
$$F_{yy}^{//} = (2x^2 - 2)|_{M_1} = -2;$$
$$F_{xy}^{//} = 4xy|_{M_1} = 0.$$

Знайдемо визначник:

$$\Delta = (F_{xy}^{//})^2 - F_{xx}^{//} \cdot F_{yy}^{//}.$$
$$\Delta = 0 - 4 = -4.$$

Оскільки визначник менше 0, то точка $M_1(0;\ 0)$ – ізольована (рис.2.3.).

Відповідь: $M_1(0,0)$ - ізольована точка.

№3. Знайти точки перетину та кути, під якими перетинаються наступні лінії: $x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 - 6x = 9$.

Розв'язання:

$$x^2 + y^2 = 9$$
$$x^2 + y^2 - 6x = 9.$$

Знайдемо точки перетину: $9 - 6x = 9$

$$-6x = 0$$
$$x = 0$$

$$y = \pm 3$$

Отримали точки $M_1(0;3), M_2(0;-3)$.

Знайдемо дотичні вектори для кривих у цих точках.

$$\vec{v}_{1,2} = \left(F_y^{/}; -F_x^{/}\right)$$

$$F_{x1}^{/} = 2x, F_{y1}^{/} = 2y,$$

$$F_{x2}^{/} = 2x - 6, F_{y2}^{/} = 2y.$$

$$F_{x1}^{/}\Big|_{M_1} = 0, F_{y1}^{/}\Big|_{M_1} = 6, F_{x2}^{/}\Big|_{M_1} = -6, F_{y2}^{/}\Big|_{M_1} = 6. F_{x_1}^{/}\Big|_{M_2} =$$

$$0, F_{y1}^{/}\Big|_{M_2} = -6, F_{x2}^{/}\Big|_{M_2} = -6, F_{y2}^{/}\Big|_{M_2} = -6.$$

$$\vec{v}_1(M_1) = (6;0)$$

$$\vec{v}_2(M_1) = (6;6)$$

$$\vec{v}_1(M_2) = (-6;0)$$

$$\vec{v}_2(M_2) = (-6;6)$$

$$cos\,\alpha = \frac{(\vec{v}_1, \vec{v}_2)}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|}$$

$$|\vec{v}_1| = \sqrt{36+0} = 6,$$

$$|\vec{v}_2| = \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2},$$

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 36.$$

$$cos\,\alpha = \frac{36}{6\sqrt{2}\cdot 6} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

№4. Доведіть, що наступні лінії перетинаються під прямим кутом $y = x - x^2, y = x^2 - x$.

Розв'язання:

Знайдемо точки перетину:

$$x - x^2 = x^2 - x, 2x^2 - 2x = 0, x(x-1) = 0,$$

$$x_1 = 1, x_2 = 0,$$

$$y_1 = 0, y_2 = 0.$$

$M_1(1;0)$, $M_2(0;0)$ – точки перетину.

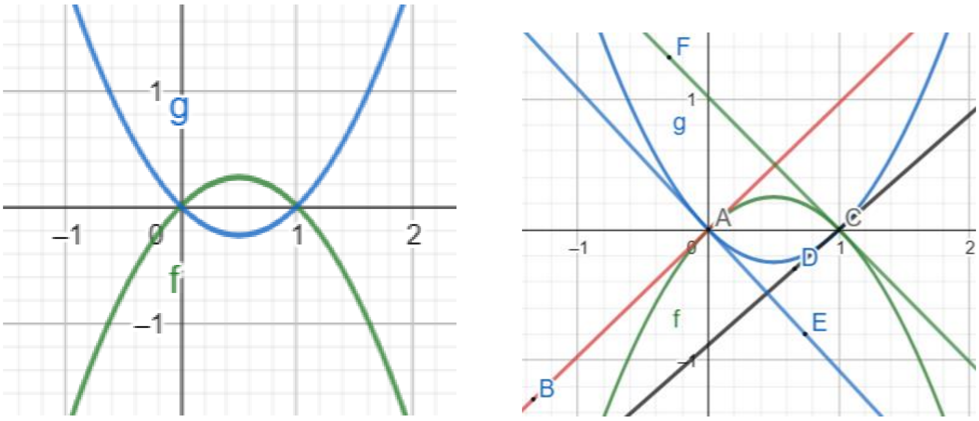


Рис.2.4

Знайдемо дотичні вектори для кривих у цих точках.

$$\vec{v}_{1,2} = \left(F_y^{/}; -F_x^{/}\right)$$

$$F_{x1}^{/} = 1 - 2x, F_{y1}^{/} = -1,$$

$$F_{x2}^{/} = 2x - 1, F_{y2}^{/} = -1.$$

$$F_{x1}^{/}|_{M_1} = -1, F_{y1}^{/}|_{M_1} = -1.\ F_{x2}^{/}|_{M_1} = 1, F_{y2}^{/}|_{M_1} = -1.$$

$$\overrightarrow{v_1} = (-1; 1), \overrightarrow{v_2} = (-1; -1).$$

$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = \sqrt{2},$$

$$(\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}) = 1 - 1 = 0.$$

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{v}_1, \vec{v}_2)}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|} = 0,$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

$$F_{x1}^{/}|_{M_2} = 1, F_{y1}^{/}|_{M_2} = -1.\ F_{x2}^{/}|_{M_2} = -1, F_{y2}^{/}|_{M_1} = -1.$$

$$\vec{v}_1 = (-1;-1), \vec{v}_2 = (-1; 1)$$

$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = \sqrt{2},$$

$$(\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}) = 1 - 1 = 0.$$

$\cos\alpha = \frac{(\vec{v}_1, \vec{v}_2)}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|} = 0, \alpha = \frac{\pi}{2}.$

Доведено.

Завдання для аудиторної роботи

1. Знайдіть особливі точки ліній заданих наступними рівняннями:

а) $y^2 = x^3 - x^2$, б) $y^2 = x^3 + x^2$.

2. Знайдіть особливі точки і напишіть рівняння дотичних в них для наступних ліній:

а) $(x^2 + y^2)x - 2ay^2 = 0$;

б) $(2a - x)y^2 = x(x - a)^2$;

в) $x = \frac{3at}{1+t^3},\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}$;

г) $x = t^2, y = t^4 + t^5$.

3. Доведіть, що наступні лінії перетинаються під прямим кутом x^2-y^2=a, xy=b.

4. Знайдіть точки перетину та кути, під якими перетинаються наступні лінії $y^2=4x$, $x^2=4y$.

Завдання для самостійної роботи

1. Визначте характер особливих точок і напишіть рівняння дотичних в цих точках:

а) $x^3 + y^3 = xy$; б) $y^2 = bx^3 + ax^2, a, b \in R$

2. Дослідіть характер особливих точок:

а) $x^2y^2 = x^2 + y^2$;

б) $4y^2 = x^5 + 5x^4$;

в) $x = \frac{(t+2)^2}{t+1}; y = \frac{(t-2)^2}{t-1}$.

3. Знайдіть точки перетину та кути, під якими перетинаються наступні лінії *y=sinx, y=cosx.*

4. Доведіть, що наступні лінії перетинаються під прямим кутом:

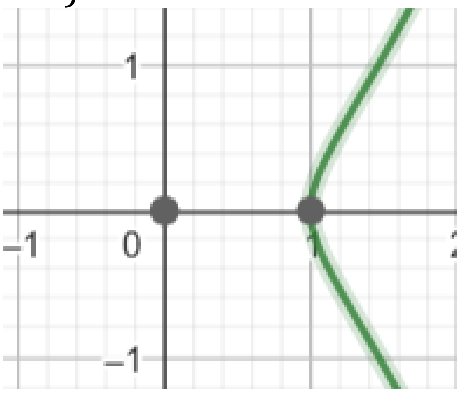
а) $y^2 = 2ax + a^2, y^2 = -2bx + b^2$;

б) $r = ae^{\phi}, r = be^{-\phi}$.

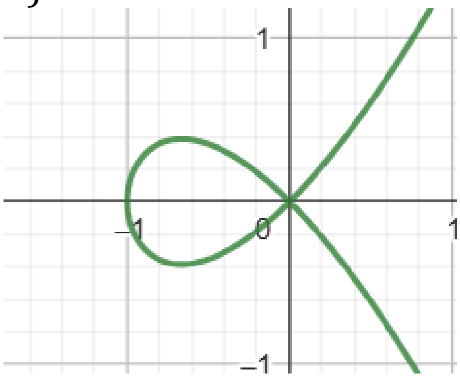
Відповіді

Завдання для аудиторної роботи

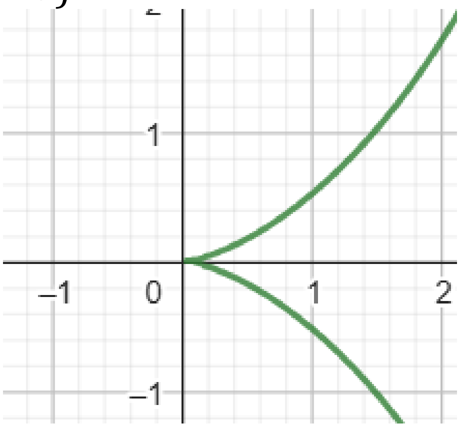
1. а)



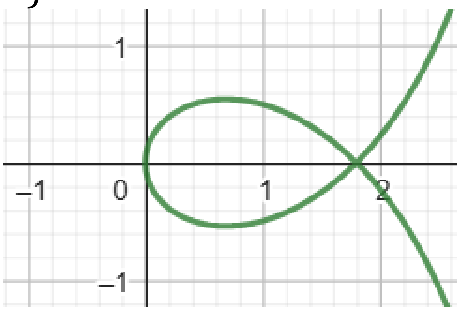
б)



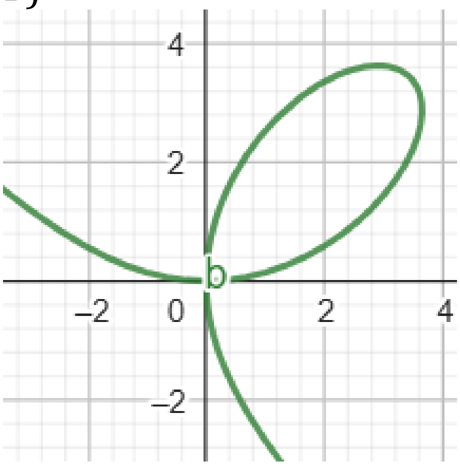
2.а)



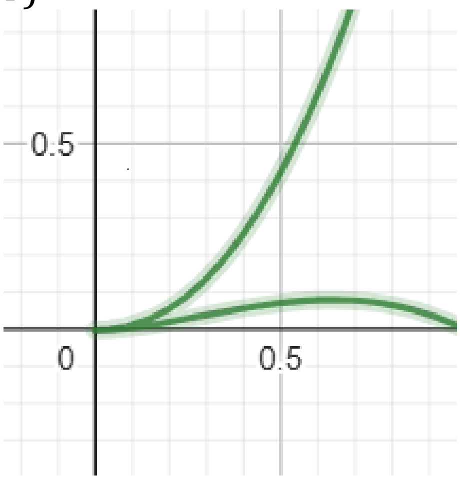
б)

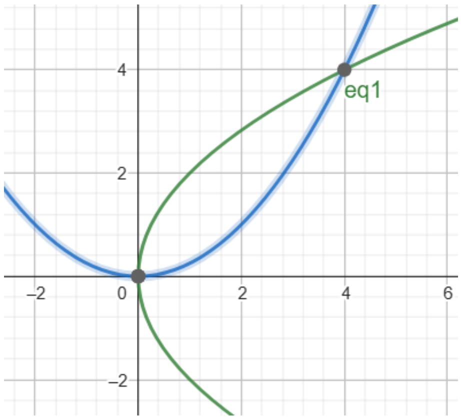


в)



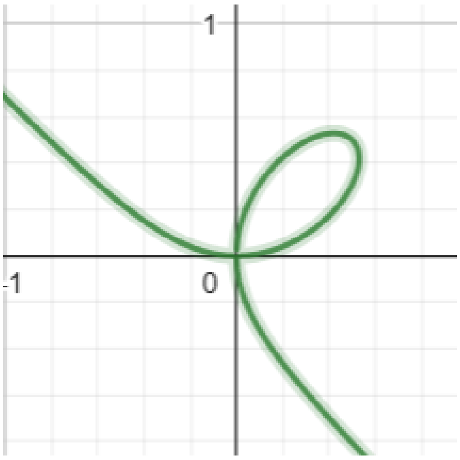
г)



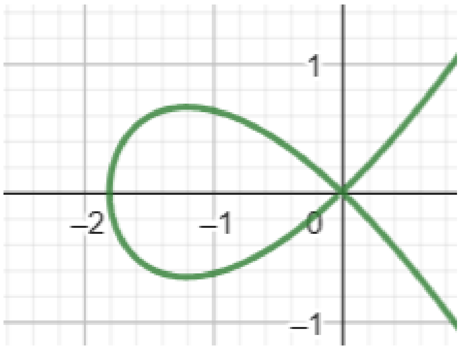
4. 

Завдання для самостійної роботи

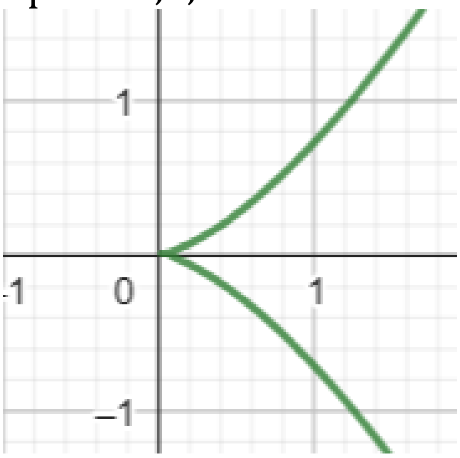
1.а)



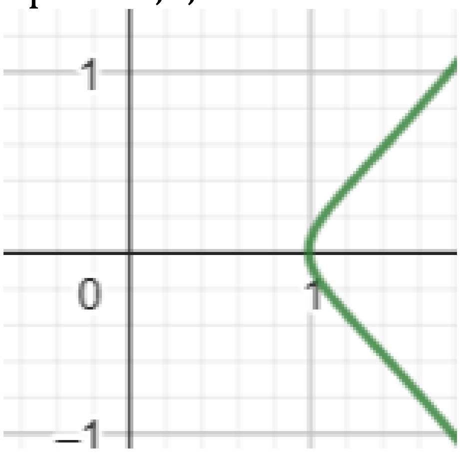
б) при b=0,5; a=0,9;



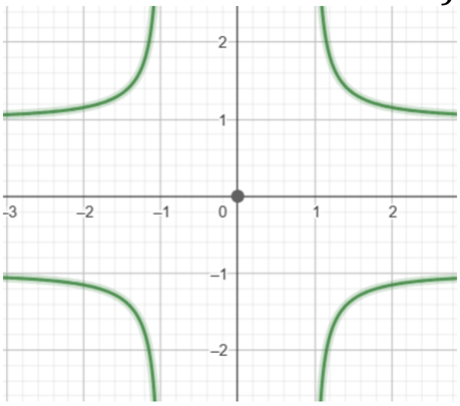
при b=0,5, a=0



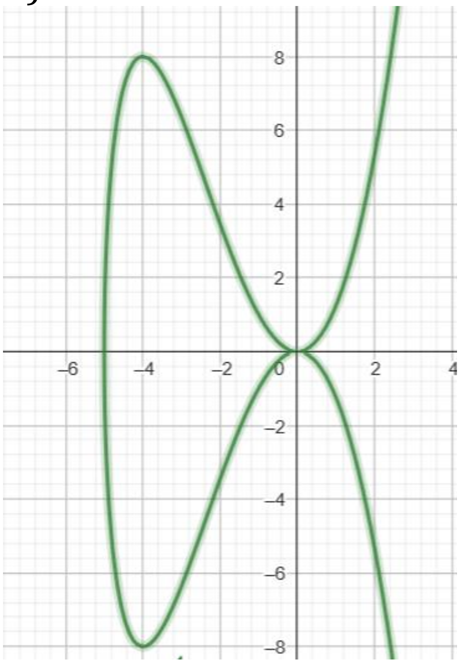
при b=0,5, a<0



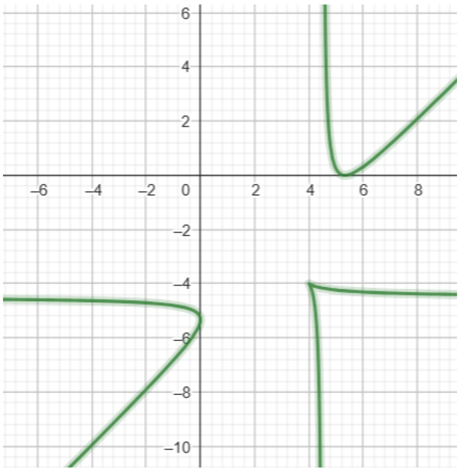
2. а)



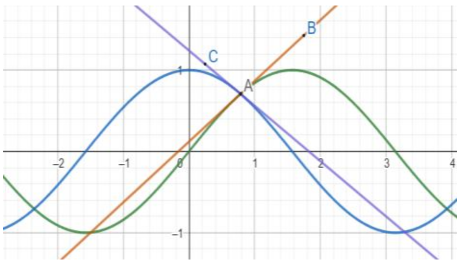
б)



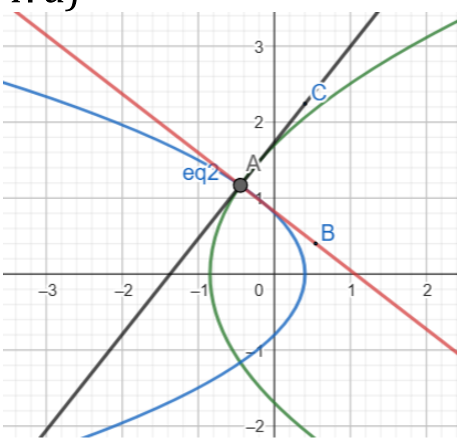
в)



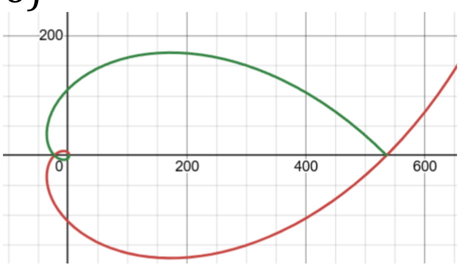
3.



4. а)



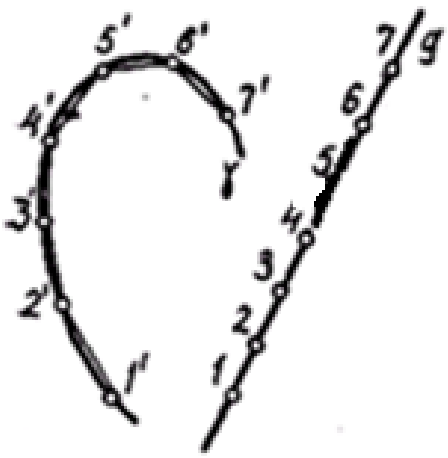
б)



ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 3
АСИМПТОТИ ПЛОСКОЇ КРИВОЇ. ДОВЖИНА ДУГИ ПЛОСКОЇ ТА ПРОСТОРОВОЇ КРИВОЇ

1. Асимптоти плоских кривих
2. Довжина дуги кривої

Короткі теоретичні відомості

Уявимо собі пряму лінію (відрізок g) та криву лінію γ. Припустимо, що крива γ отримана з прямої g за допомогою деякої деформації (топологічного відображення *f*), без розривів та без склеювань точок  	Ламана, що лежить на кривій, є **правильно вписана** в криву γ, якщо точки зламу цієї ламаної (вершини) розташовані на кривій γ у тому самому порядку, в якому відповідні їм точки розташовані на прямій g. Іншими словами, якщо ми пройдемо ламаною Г від однієї вершини до іншої, то їх прообрази на прямій g будуть розташовані в тому ж порядку. Ця властивість правильності вписування ламаної не залежить від того, яким саме чином ми деформували пряму g щоб отримати криву γ. Головне, щоб ця деформація була без розривів та склеювань
Крива називається **спрямлюваною** в околі точки *P*, якщо ця точка має елементарний окіл такий,	Спрямлювана крива – це така крива, яку можна «розпрямити» у відрізок прямої,

що всі правильно вписані в неї ламані рівномірно є обмежені по довжині. Крива, спрямлювана в околі кожної своєї точки, називається просто спрямлюваною	не розриваючи її і не стискуючи в точку. Довжина такої кривої є скінченною величиною
Відрізком кривої ми називатимемо її частину, гомеоморфну замкнутому прямолінійному відрізку. **Довжиною дуги відрізка** (або просто дугою) будемо, називати верхню грань довжин правильно вписаних в цей відрізок ламаних. Довжина дуги такого відрізка – це найбільше значення, яке може мати довжина будь-якої ламаної лінії, що повністю лежить на цьому відрізку кривої і має кінці в тих самих точках, що й відрізок кривої	Іншими словами, це максимальна довжина, яку ми можемо отримати, наближаючи нашу криву ламаною лінією
Натуральним параметром кривої будемо називати довжину дуги кривої, яка відраховується від фіксованої точки на цій кривій до довільної її точки	$$s(t)=\int_{t_0}^{t}\left\lvert \overrightarrow{r'}(t)\right\rvert dt$$
Цей параметр має фізичний зміст і відповідає	Довжина дуги не залежить від вибору системи координат, тому рівняння

довжині шляху, який потрібно пройти по кривій від деякої початкової точки до довільної точки на цій кривій	кривої в натуральному параметрі мають інваріантний характер
Параметризація	
Натуральний параметр *s*	**Довільний параметр *t***
вимірює відстань вздовж кривої від фіксованої початкової точки	може бути будь-якою змінною, яка змінюється вздовж кривої
швидкість зміни кривої щодо натурального параметра завжди дорівнює одиниці	швидкість зміни кривої щодо звичайного параметра не обов'язково є одиничною
часто використовується в теоретичних дослідженнях диференціальної геометрії, оскільки він спрощує виведення багатьох формул	часто використовуються для опису кривих у прикладних задачах, таких як комп'ютерна графіка та робототехніка
Довжина дуги кривої заданої	
параметрично, параметр t	$x = x(t),\ y = y(t),$ $z = z(t),$ $s(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \lvert\overrightarrow{r'}(t)\rvert\, dt$ $= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt.$
параметрично, параметр x	$y = y(x),\ z = z(x),$ $s(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx.$
Для того, щоб крива γ, задана рівняннями $x=x(t)$, $y=y(t)$ $(a<t<b)$, прямуючи до нескінченності при $t \to a$, мала	

<table>
<tr><td colspan="2">асимптоту, необхідно і достатньо:
1. При $t \to a$ хоча б одне з двох відношень $y(t)/x(t)$ або $x(t)/y(t)$ має скінченну границю. Нехай для визначеності $y(\mathrm{t})/x(\mathrm{t}) \to k$
2. При $t \to a$ і виконанні першої умови вираз $y(t)$-$kx(t)$ також має границю. Якщо цю границю позначити b, то рівняння асимптоти буде $y - kx - b = 0$</td></tr>
<tr><td>Якщо крива γ задана явним рівнянням $y = f(x)$</td><td>$k = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{y}{x}, b = \lim\limits_{x \to \infty}(y - kx)$</td></tr>
<tr><td>Якщо крива γ задана параметрично або векторним рівнянням
$\vec{r} = \{x(t), y(t)\}$</td><td>$k = \lim\limits_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)},$
$b = \lim\limits_{t \to t_0}(y(t) - kx(t))$
При цьому:
Якщо $\begin{cases} \lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \infty, \\ \lim\limits_{t \to t_0} y(t) = a, \end{cases}$ то пряма *y*=*a* – горизонтальна асимптота;
Якщо $\begin{cases} \lim\limits_{t \to t_0} x(t) = a, \\ \lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \infty, \end{cases}$ то пряма *x*=*b* – вертикальна асимптота</td></tr>
<tr><td>Якщо крива задана неявним рівнянням $F(x, y) = 0$</td><td>Якщо система
$\begin{cases} A_0 = f(k) = 0; \\ A = \phi(k, b) = 0. \end{cases}$
має розв’язок, то крива має асимптоту
$y - kx - b = 0$</td></tr>
</table>

Типові завдання

№1. Знайти асимптоти кривих

а) $y = \frac{1}{(x+1)^2}$; б) $y = 2x + \frac{1}{x}$;

в) $x^3 + y^2 + y^3 + x^2 - 2 = 0$;

г) $y(x^2 - 3x + 2) = x^3 - 3x^2 + 1$.

Розв'язання:

а) $\boldsymbol{y = \frac{1}{(x+1)^2}}$.

Знайдемо вертикальні асимптоти. Задана функція невизначена при $x = -1$.

Отже, пряма $x = -1$ – вертикальна асимптота.

Для знаходження похилої асимптоти обчислимо k і b.

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x}, b = \lim_{x \to \infty} (y - kx).$$

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x(x+1)^2} = 0,$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (\frac{1}{(x+1)^2} - 0) = 0.$$

Отже, похилої асимптоти нема, оскільки k=0, то пряма y=0 – горизонтальна асимптота.

Відповідь: x=-1 – вертикальна асимптота, y=0 – горизонтальна асимптота.

б) $\boldsymbol{y = 2x + \frac{1}{x}}$.

Знайдемо вертикальні асимптоти. Задана функція невизначена при $x = 0$.

Отже, пряма $x = 0$ – вертикальна асимптота.

Для знаходження похилої асимптоти обчислимо k і b.

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x}, b = \lim_{x \to \infty} (y - kx).$$

$$k = \lim_{x \to \infty} \left(2 + \frac{1}{x^2}\right) = 2,$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (2x + \frac{1}{x} - 2x) = 0.$$

Отже, пряма $y = 2x$ – похила асимптота.

Відповідь: x=0 – вертикальна асимптота, y=2x – похила асимптота.

в) $\boldsymbol{x^3+y^2+y^3+x^2-2=0.}$

Задане рівняння є рівнянням третього степеня і в ньому присутній член y^3, тому вертикальної асимптоти крива немає.

Нехай рівняння асимптоти $y = kx + b$. Маємо:

$$x^3+(kx+b)^2+(kx+b)^3+x^2-2=0$$

Розкриємо дужки і згрупуємо змінні при старших степенях.

$$x^3+k^2x^2+2kxb+b^2+k^3x^3+3k^2x^2b+3kxb^2+$$
$$+b^3+x^2-2=0,$$
$$x^3(1+k^3)+x^2(k^2+3k^2b+1)+x(2kb+3kb^2)+$$
$$+b^2+b^3-2=0.$$

Складаємо систему:

$$\begin{cases}1+k^3=04\\ k^2+3k^2b+1=0.\end{cases}$$

Знайдемо k та b:

$$\begin{cases}k=-1;\\ b=-\dfrac{2}{3}.\end{cases}$$

Отже, рівняння асимптоти має вигляд:

$$y=-x-\frac{2}{3}.$$

Відповідь: $y=-x-\frac{2}{3}-$ похила асимптота.

г) $\boldsymbol{y(x^2-3x+2)=x^3-3x^2+1}$

Нехай рівняння асимптоти $y = kx + b$. Маємо:

$$(kx+b)(x^2-3x+2)=x^3-3x^2+1$$

Розкриємо дужки і згрупуємо змінні при старших степенях:

$$kx^3 - 3kx^2 + 2kx + bx^2 - 3bx + 2b - x^3 + 3x^2 - 1 =$$
$$= 0;$$
$$x^3(k-1) - x^2(3k - b - 3) + x(2k - 3b) + 2b - 1 = 0.$$

Складемо систему:

$$\begin{cases} k - 1 = 0; \\ 3k - b - 3 = 0; \end{cases} \begin{cases} k = 1; \\ b = 0. \end{cases}$$

Отже, $y=x$ – похила асимптота.

Знайдемо вертикальні асимптоти.

Якщо рівняння вертикальної асимптоти $x = a$, то:

$$y(a^2 - 3a + 2) = a^3 - 3a^2 + 1.$$

Степінь отриманого рівняння $n = 3$, тому коефіцієнти многочлена матимуть вигляд:

$$B_0 = 0, B_1 = 0, B_2 = a^2 - 3a + 2, B_3 = -a^3 + 3a^2 - 1.$$

Щоб знайти a розв'яжемо рівняння:

$$a^2 - 3a + 2 = 0;$$
$$a = 2, a = 1.$$

Тоді, $x = 2$, $x = 1$ – вертикальні асимптоти.

Відповідь: $x = 2$, $x = 1$ – вертикальні асимптоти, $y = x$ – похила асимптота.

№2. Знайти довжину дуги кривої $\boldsymbol{x = a(\cos t + t\sin t), y = a(\sin t - t\cos t)}$, що знаходиться між точками $\boldsymbol{t_1 = 0, t_2 = 1}$.

Розв'язання:

Знайдемо довжину дуги за формулою:

$$s(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt.$$

Знайдемо похідні і підставимо їх у формулу.

$$x' = a(-\sin t + \sin t + t\cos t) = at\cos t\,,$$
$$y' = a(\cos t - \cos t + t\sin t) = at\sin t.$$

$$s = \int_0^1 \sqrt{a^2t^2\cos^2 t + a^2t^2\sin^2 t}\, dt =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{a^2t^2(\cos^2 t + \sin^2 t)}\, dt = \int_0^1 at dt = \frac{at^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{a}{2}.$$

Відповідь: $s = \frac{a}{2}$

№3. Знайти довжину дуги кривої $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}\ln x\,, z = \frac{x^2}{2}}$ від *x* = 1 *до x* = 2.

Розв'язання:

$$\begin{cases} x = t, \\ y = \dfrac{1}{2}\ln t\,, \\ z = \dfrac{t^2}{2}. \end{cases} \begin{cases} x^/ = 1, \\ y^/ = \dfrac{1}{2t}, \\ z = t. \end{cases}$$

Довжину дуги будемо шукати за формулою:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \left|\overrightarrow{r^/}(t)\right| dt.$$

Маємо:

$$s = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{4t^2} + t^2}\, dt = \int_1^2 \frac{1 + 2t^2}{2t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{t} dt + \int_1^2 t dt = \left(\frac{1}{2}\ln t + \frac{t^2}{2}\right)\bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{3}{2}.$$

Відповідь: $s = \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{3}{2}$.

Завдання для аудиторної роботи

1.Знайдіть довжину дуги кривої між двома довільними точками:

а) $y = x^{\frac{3}{2}}$; б) $y = ln\,x$;

в) $x = a(cos\,t + t\,sin\,t), y = a(sin\,t - t\,cos\,t)$.

2. Обчисліть довжину дуги між вказаними точками наступних кривих:

а) $y = lncos\,x\,, x_1 = 0, x_2 = \frac{\pi}{3}$;

б) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}ln\,x\,, x_1 = 1, x_2 = 4$;

в) $x = 8at^3, y = 3a(2t^2 - t^4), t_1 = 0, t_2 = \sqrt{2}$.

3. Знайдіть довжину всієї кривої $r = a(1 + cos\,\phi)$.

4.Обчислити довжину дуги кривої:

а) $\vec{r}(t) = \{sin\,t\,, cos\,t\,, 2t + 1\}, 1 \le t \le 3$;

б) $\vec{r}(t) = \{3a\,cos\,t\,, 3a\,sin\,t\,, 4at\}, 0 \le t \le 1$.

5. Знайдіть асимптоти ліній, заданих рівнянням у явному вигляді:

а) $y = \frac{2}{x-3}$; б) $y = \frac{x^2-4x+7}{x}$.

6. Знайти асимптоти кривих, заданих рівнянням в параметричному вигляді:

а) $x = \frac{2t}{(t-1)(t-2)}, y = \frac{t^2}{(t-1)(t-3)}$;

б) $x = \frac{2t-1}{t^2-1}, y = \frac{t^2}{t-1}$.

7. Знайти асимптоти ліній, заданих неявним рівнянням:

а) $xy^2 - y^2 - 4x = 0$;

б) $(x^2 - y^2)(x - y) = 1$;

в) $(a - x)y^2 = x^3$.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчисліть довжину дуги між двома довільними точками наступних кривих:

   а) $y = a ch \frac{x}{a}$;

   б) $x = a\left(\ln t g \frac{t}{2} + \cos t\right), y = a \sin t$.

2. Знайдіть довжину всієї кривої:

   $x = a \cos^3 t\,, y = a \sin^3 t$.

3. Знайти довжину дуги гвинтової лінії від точки її перетину з віссю Ox до довільної точки $M(t)$: $\vec{r} = \{3a \cos t\,, 3a \sin t\,, 4at\}$.

4. Знайти асимптоти кривих, заданих параметричним рівнянням:

   а) $x = t^3 - \frac{1}{t}, y = t^3 + 1$; б) $x = t^2 y = t^2 + \frac{2}{t}$.

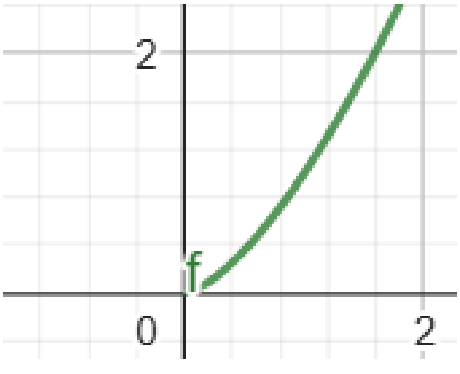
5. Знайти асимптоти алгебраїчної кривої заданої рівнянням $-2x^3 + x^2 y + xy^2 + y^2 - xy + 1 = 0$.

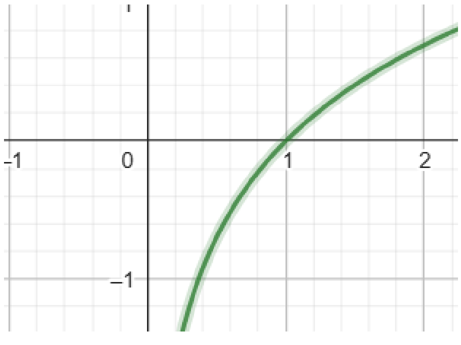
6. Знайти асимптоти кривої, заданої рівнянням в несиметричній формі $y = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2-x} - \frac{1}{3-x}$.

Відповіді

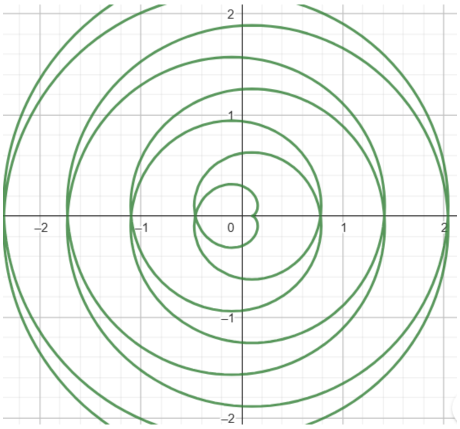
Завдання для аудиторної роботи

1. а) б)



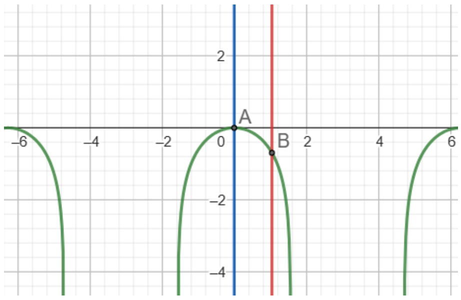


в)



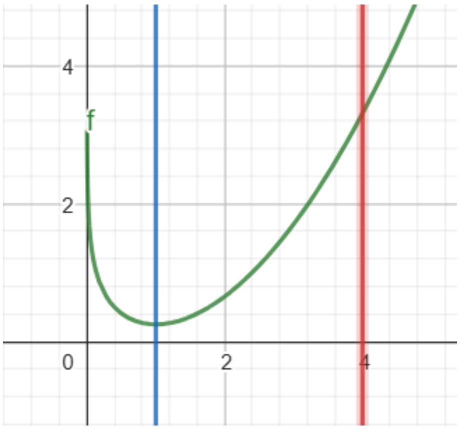
2
1
−2
−1
0
1
2
−1
−2

2.а)



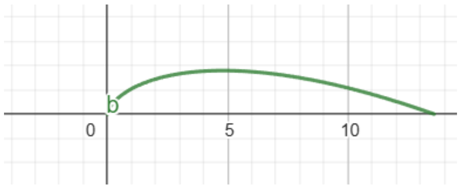
2
A
B
−6
−4
−2
0
2
4
6
−2
−4

б)



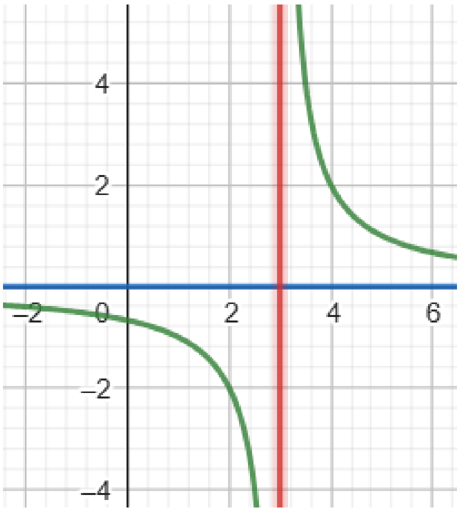
4
f
2
0
2
4

в)



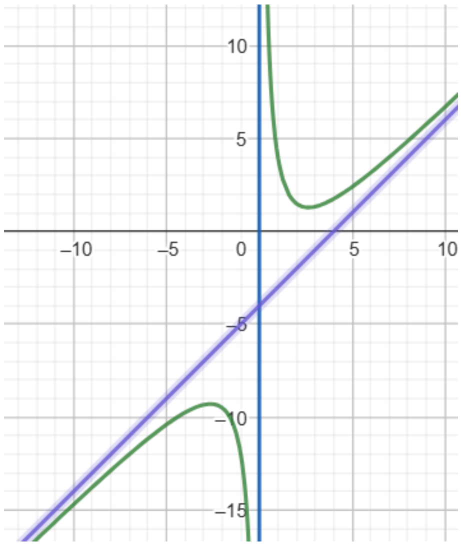
b
0
5
10

5. а)



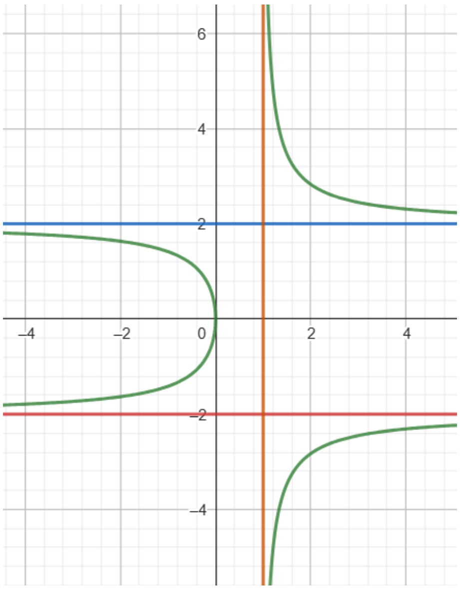
4
2
−2
0
2
4
6
−2
−4

б)

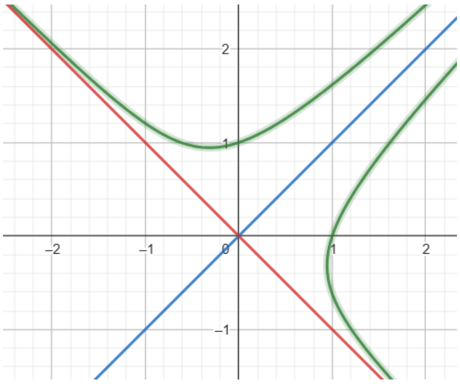


10
5
−10
−5
0
5
10
−5
−10
−15

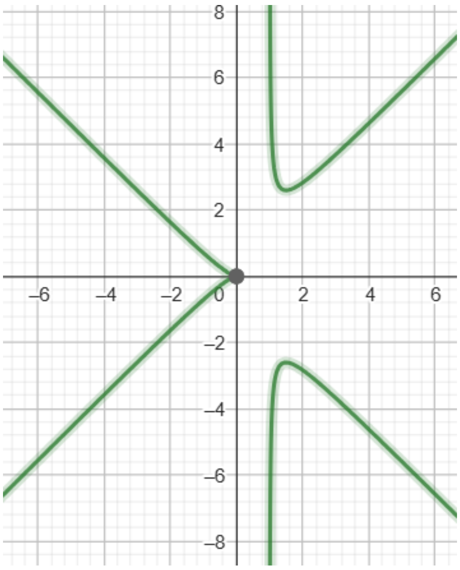
7. а)



б)

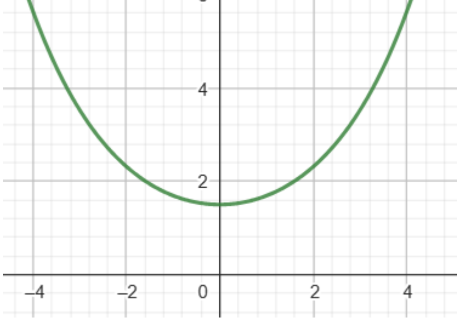


в)

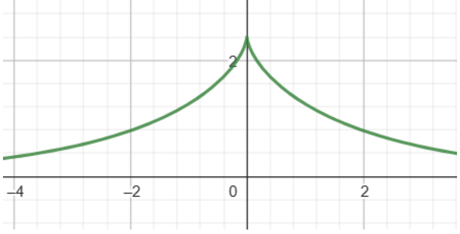


Завдання для самостійної роботи

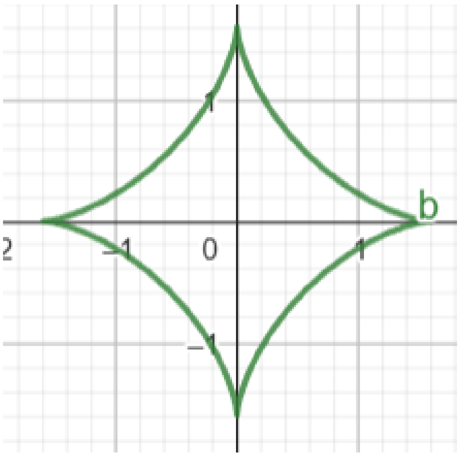
1. а)



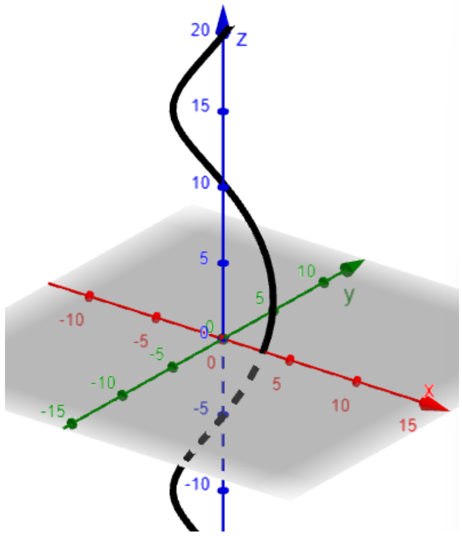
б)



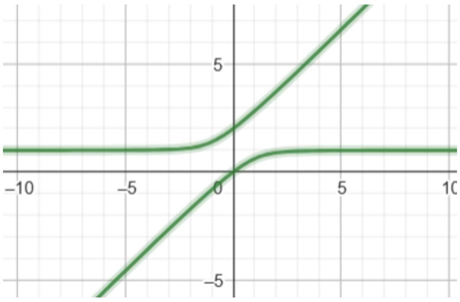
2.



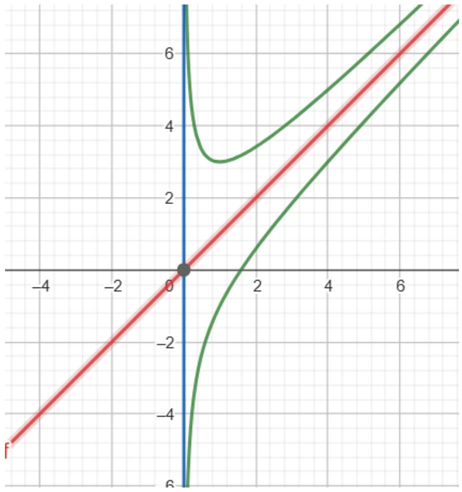
3.



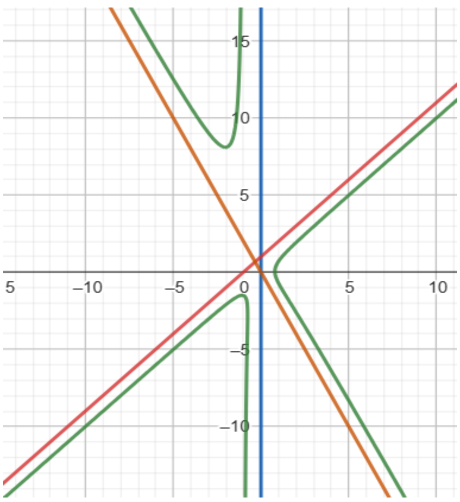
4. а)



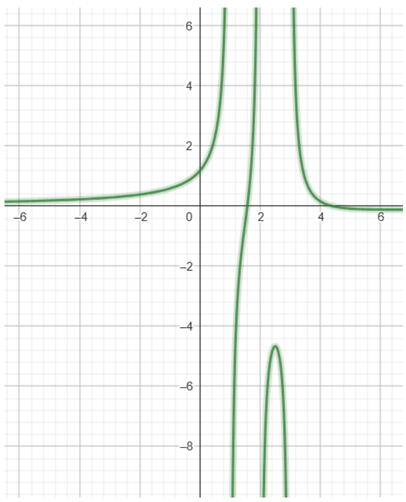
б)



5.



6.



ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 4
КРИВИНА ПЛОСКОЇ ТА ПРОСТОРОВОЇ КРИВОЇ. СКРУТ ПРОСТОРОВОЇ КРИВОЇ

1. Кривина плоскої та просторової кривої
2. Геометричний зміст кривини
3. Скрут просторової кривої
4. Натуральне рівняння кривої

Короткі теоретичні відомості

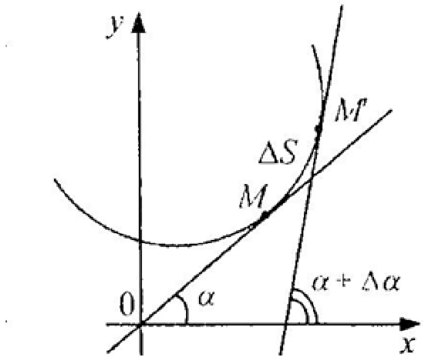
<table>
<tr>
<td>

Дослідимо рух дотичної до кривої $M \to M'$: $MM' = \Delta S$. Відношення $\frac{\Delta\alpha}{\Delta S}$ визначає зміну кута дотичної під час руху від точки M до точки M'.

Якщо існує $lim \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta S}\right| = k$, то число k називають **кривиною** кривої в точці M.

Кривина визначає зміну кута дотичної прямої під час руху від точки M до точки M'

</td>
<td>



Геометричний зміст кривини: кривина кривої визначає міру відхилення кривої від її дотичної в даній точці

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Кривина дозволяє кількісно оцінити, наскільки сильно крива відхиляється від прямої лінії у кожній точці

</td>
<td>

Уявіть собі, що ви їдете на автомобілі по звивистій дорозі. Кривина дороги у певній точці відповідає тому, наскільки різко ви повертаєте руль у цьому місці. Чим більша кривина, тим крутіший поворот

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Регулярна (двічі диференційована) крива має в кожній точці певну кривину k

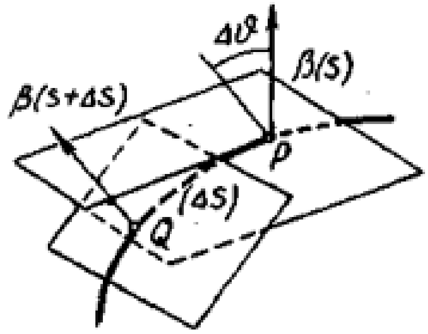
</td>
<td>

$$|k| = \left|\overrightarrow{r^{//}}(s)\right|$$

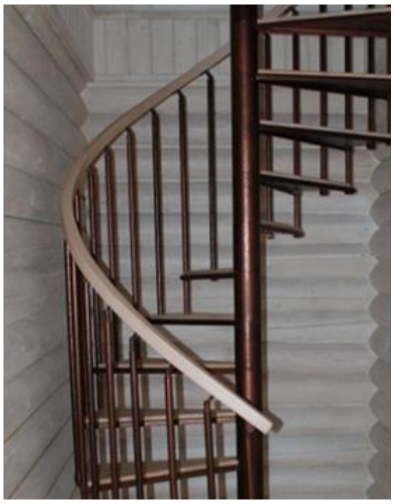
$\vec{r} = \vec{r}(s)$ – натуральна параметризація кривої

</td>
</tr>
</table>

Формули для знаходження абсолютної кривини кривої	
$\vec{r} = \vec{r}\,(t)$ – довільна параметризація	$|k| = \dfrac{\left|\left[\vec{r'} \times \vec{r''}\right]\right|}{\left|\vec{r'}\right|^3}$ $|k| = \dfrac{\left|y''x' - x''y'\right|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$
просторова крива	$|k| = \dfrac{\sqrt{(z''y' - y''z')^2 + (x''z' - z''x')^2 + (y''x' - x''y')^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}$
явне задання *y=f(x)*	$|k| = \left|\dfrac{f''}{(1 + (f')^2)^{\frac{3}{2}}}\right|$
неявне задання *F(x,y)=0*	$|k| = \left|\dfrac{F''_{yy}F'^2_x - 2F''_{xy}F'_x F'_y + F''_{xx}F'^2_y}{\left(F'^2_x + F'^2_y\right)^{\frac{3}{2}}}\right|$
полярне задання $\rho = \rho(\varphi)$	$|k| = \left|\dfrac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|$
Дотичний вектор $\vec{r'}\,(t)$ кривої, при русі уздовж кривої у напрямі зростання *t*, повертається	Крива вигнута вліво відносно напрямку руху, тобто «повертає ліворуч», тоді кривина додатня. Якщо вигнута вправо відносно руху, тобто повертає «праворуч», то кривина від'ємна 

	$k>0$, де крива вигнута вгору ($r''(t)>0$), $k<0$, де крива вигнута вниз ($r''(t)<0$).
Нехай P – довільна точка кривої γ і Q – точка кривої, близька до P. Позначимо Δv кут між дотичними площинами кривої в точках P і Q (кут між бінормалями), а $\|\Delta s\|$ – довжину відрізка дуги PQ кривої. Під **абсолютним скрутом** $\|\chi\|$ кривої γ в точці P розумітимемо границю відношення $\Delta v / \|\Delta s\|$ коли $Q \to P$	 Абсолютний скрут кривої в точці P – це величина, яка показує, наскільки швидко змінюється напрямок дотичної площини при русі вздовж кривої в околі точки P. Іншими словами, це міра того, наскільки сильно крива «закручується» у просторі навколо своєї дотичної

Характеристика	*Кривина*	*Скрут*
Що характеризує	Швидкість зміни напрямку дотичної до кривої в даній точці. Іншими словами, це міра того, наскільки сильно крива відхиляється від прямої лінії в цій точці	Швидкість зміни напрямку бінормалі до даної точки
Геометрична інтерпретація	Чим більша кривина, тим різкіший поворот кривої.	Наскільки сильно крива закручується навколо своєї дотичної.

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Наскільки швидко спіраль закручується навколо своєї осі. Чим більше кривина, тим щільніше витки спіралі</td><td>Наскільки швидко спіраль виходить із площини. Чим більше скрут, тим швидше спіраль піднімається або опускається в міру свого обертання</td></tr>
<tr><td>Аналогія</td><td colspan="2">Уявіть собі дорогу: чим крутіший поворот, тим більша кривина в цій точці</td><td>Уявіть собі гвинт: скрут визначає, наскільки щільно витки гвинта розташовані один від одного</td></tr>
<tr><td colspan="2">Крива з великою кривиною і малим скрутом нагадуватиме щільно закручену пружину, яка повільно піднімається або опускається</td><td colspan="2">Крива з малою кривиною і великим скрутом буде схожа на гвинтові сходи з широкими прольотами та крутими підйомами
</td></tr>
<tr><td colspan="4">Коло має постійну кривину, відмінну від нуля, і нульовий скрут, оскільки лежить в одній площині. Пряма лінія має нульову кривину і нульовий скрут, оскільки не згинається і не виходить із площини. Гвинтова лінія (рис.1.9) має як ненульову кривину, так і ненульовий скрут. Обидва значення постійні вздовж усієї лінії</td></tr>
</table>

Скрут кривої, заданої натуральним параметром	$\lvert\chi\rvert = \dfrac{\left\lvert\left(\overrightarrow{r'}_s, \overrightarrow{r''}_s, \overrightarrow{r'''_s}\right)\right\rvert}{k^2}$
Довільним параметром	$\lvert\chi\rvert = \dfrac{\left\lvert\left(\overrightarrow{r'}_t, \overrightarrow{r''}_t, \overrightarrow{r'''_t}\right)\right\rvert}{\left[\overrightarrow{r'} \times \overrightarrow{r''}\right]^2}$
Систему рівності *k = k(s), χ = χ(s)* називають **натуральними рівняннями** кривої (де *s* – натуральний параметр – довжина дуги) Крива натуральними рівняннями визначається однозначно з точністю до руху	Всі плоскі криві з даним натуральним рівнянням *k = k(s)* мають наступне параметричне задання x= ∫cos ϑ(s) · ds , y= ∫sin ϑ(s)· ds

Типові завдання

№1. Знайти кривину плоскої кривої:

а) $y = sin\, x$; б) $x = t^2, y = t^3$.

Розв'язання:

а) $\boldsymbol{y = sin\, x}$.

Обчислимо кривину кривої за формулою:

$$|k| = \frac{|y^{//}|}{(1 + y^{/2})^{\frac{3}{2}}}.$$

Знайдемо похідні:

$$y^{/} = cos\, x\,,$$

$$y^{//} = -\,sin\, x.$$

Підставимо знайдені похідні у формулу, отримаємо:

$$|k| = \frac{|-\,sin\, x|}{(1 + cos^2 x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|\,sin\, x\,|}{(1 + cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Відповідь: $|k| = \frac{|sin\, x|}{(1+cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}$.

Зауваження. Розшукуючи кривину у конкретній точці необхідно враховувати напрям відхилення кривої від дотичної. Значення кривини у конкретній точці можна перевірити за допомогою програми GeoGebra.

Наприклад, для попередньої умови додамо додаткову умову: знайти кривину у точці $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

$$k = \frac{-sinx}{(1 + cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}|_{\pi/3} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{5}{4}\sqrt{\frac{5}{4}}} = -\frac{4\sqrt{3}}{5\sqrt{5}} \approx -0{,}62.$$

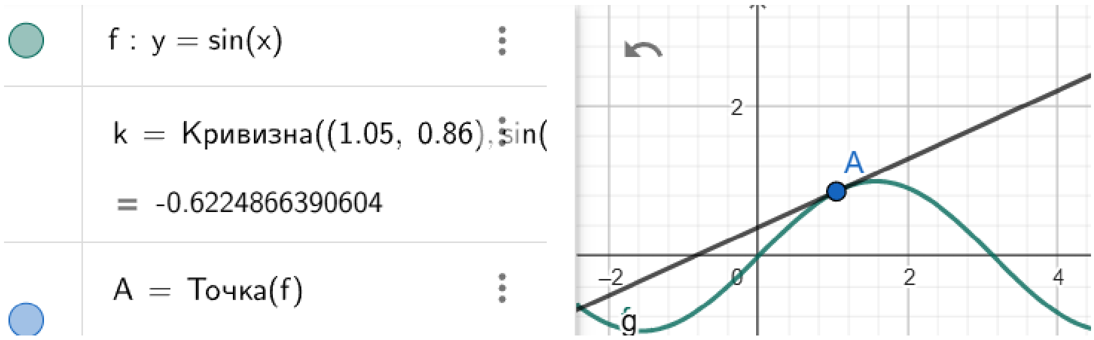


Рис.4.1

б) $\boldsymbol{x = t^2, y = t^3}$.

Обчислимо кривину кривої за формулою:

$$|k| = \frac{|x^/ y^{//} - y^/ x^{//}|}{(x^{/2} + y^{/2})^{\frac{3}{2}}}.$$

Знайдемо похідні:

$$x^/ = 2t, y^/ = 3t^2,$$

$$x^{//} = 2, y^{//} = 6t.$$

Підставимо знайдені похідні у формулу для знаходження кривини:

$$|k| = \frac{|2t \cdot 6t - 3t^2 \cdot 2|}{(4t^2 + 9t^4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{6t^2}{(t^2(4 + 9t^2))^{\frac{3}{2}}} = \frac{6t^2}{t^3(4 + 9t^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{6}{t(4 + 9t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Відповідь: $|k| = \frac{6}{t(4+9t^2)^{\frac{3}{2}}}$.

№2. Знайти кривину та скрут просторової кривої $\vec{r} = \left(\frac{2}{t}; \ln t; -t^2\right)$ в довільній точці.

Розв'язання:

Кривину і скрут будемо обчислювати за формулами:

$|k| = \frac{\left|\left[\bar{r}_0^{/}, \bar{r}_0^{//}\right]\right|}{\left|\bar{r}_0^{/}\right|^3}$; $|\chi| = \frac{\left|\left(\bar{r}_0^{/}, \bar{r}_0^{//}, \bar{r}_0^{///}\right)\right|}{\left|\left[\bar{r}_0^{/} \text{x} \bar{r}_0^{//}\right]\right|}$;

$$\begin{cases} x = \frac{2}{t}, \\ y = \ln t, \\ z = -t^2. \end{cases} \begin{cases} x^{/} = -\frac{2}{t^2}, \\ y = \frac{1}{t}, \\ z = -2t. \end{cases} \begin{cases} x^{//} = \frac{4}{t^3}, \\ y = -\frac{1}{t^2}, \\ z = -2. \end{cases}$$

$\left|\bar{r}^{/}\right| = \sqrt{\frac{4}{t^4} + \frac{1}{t^2} + 4t^2} = \frac{\sqrt{4t^6+t^2+4}}{t^2}$.

$$\left[\bar{r}^{/} \times \bar{r}^{//}\right] = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{1}{t} & -2t \\ \frac{4}{t^3} & -\frac{1}{t^2} & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{2}{t}\bar{\imath} - \frac{8}{t^2}\bar{\jmath} + \frac{2}{t^4}\bar{k} - \frac{4}{t^4}\bar{k} - \frac{4}{t^2}\bar{\jmath} - \frac{2}{t}\bar{\imath} =$$

$$= -\frac{4}{t}\bar{\imath} - \frac{12}{t^2}\bar{\jmath} - \frac{2}{t^4}\bar{k};$$

$\left[\bar{r}^{/} \times \bar{r}^{//}\right] = \left(-\frac{4}{t}; -\frac{12}{t^2}; -\frac{2}{t^4}\right)$;

$$\left|\left[\bar{r}^{/} \times \bar{r}^{//}\right]\right| = \sqrt{\frac{16}{t^2} + \frac{144}{t^4} + \frac{4}{t^8}} = \frac{2\sqrt{4t^6 + 36t^4 + 1}}{t^4}.$$

$|k| = \frac{\left(2\sqrt{4t^6+36t^4+1}\right) \cdot t^6}{t^4 \cdot \left(\sqrt{4t^6+t^2+4}\right)^3} = \frac{2t^2\sqrt{4t^6+36t^4+1}}{\left(\sqrt{4t^6+t^2+4}\right)^3}$;

$$\bar{r}^{///} = \left\{-\frac{12}{t^4}; \frac{2}{t^3}; 0\right\}.$$

$$(\bar r^{/}\bar r^{//},\bar r^{///})=\begin{vmatrix}-\dfrac{2}{t^2} & \dfrac{1}{t} & -2t\\ \dfrac{4}{t^3} & -\dfrac{1}{t^2} & -2\\ -\dfrac{12}{t^4} & \dfrac{2}{t^3} & 0\end{vmatrix}=\frac{24}{t^5}-\frac{16t}{t^6}+\frac{24t}{t^6}-\frac{8}{t^5}==\frac{24}{t^5}.$$

$$|\chi|=\frac{t^8\cdot\dfrac{24}{t^5}}{2\left(\sqrt{4t^6+36t^4+1}\right)^2}=\frac{|6t^3|}{4t^6+36t^4+1}.$$

Відповідь: $|k|=\frac{2t^2\sqrt{4t^6+36t^4+1}}{\left(\sqrt{4t^6+t^2+4}\right)^3}$; $|\chi|=\frac{|6t^3|}{4t^6+36t^4+1}$.

№3. Знайти натуральні рівняння кривої: $x=t, y=\sqrt{2}\,ln\,t, z=\frac{1}{t}$.

Розв’язання:

Натуральні рівняння кривої мають вигляд: $\begin{cases}k=k(s),\\ \chi=\chi(s).\end{cases}$

Знайдемо кривину і скрут даної кривої.

$$\begin{cases}x=t,\\ y=\sqrt{2}\ln t,\\ z=\dfrac{1}{t}.\end{cases}\quad \begin{cases}x^{/}=1,\\ y^{/}=\dfrac{\sqrt{2}}{t},\\ z^{/}=-\dfrac{1}{t^2}.\end{cases}\quad \begin{cases}x^{//}=0,\\ y^{//}=-\dfrac{\sqrt{2}}{t^2},\\ z^{//}=\dfrac{2}{t^3}.\end{cases}\quad \begin{cases}x^{///}=0,\\ y^{///}=\dfrac{2\sqrt{2}}{t^3},\\ z^{/}=-\dfrac{6}{t^4}.\end{cases}$$

$$|\bar r^{/}|=\sqrt{1+\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t^4}}=\sqrt{\frac{t^4+2t^2+1}{t^4}}=\frac{t^2+1}{t^2};$$

$$[\bar r^{/}\times\bar r^{//}]=\begin{vmatrix}\bar\imath & \bar\jmath & \bar k\\ 1 & \dfrac{\sqrt{2}}{t} & -\dfrac{1}{t^2}\\ 0 & -\dfrac{\sqrt{2}}{t^2} & \dfrac{2}{t^3}\end{vmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{t^4}\bar\imath-\frac{2}{t^3}\bar\jmath-\frac{\sqrt{2}}{t^2}\bar k.$$

$$\left[\bar{r}^{/}\text{x}\,\bar{r}^{//}\right] = \left(\frac{\sqrt{2}}{t^4}; -\frac{2}{t^3}; -\frac{\sqrt{2}}{t^2}\right).$$

$$\left|\left[\bar{r}^{/} \times\ \bar{r}^{//}\right]\right| = \sqrt{\frac{2}{t^8} + \frac{4}{t^6} + \frac{2}{t^4}} = \frac{\sqrt{2 + 4t^2 + 2t^4}}{t^4} =$$

$$= \frac{\sqrt{2(t^2+1)^2}}{t^4}.$$

$$(\vec{r}^{\,/}, \bar{r}^{\,//}, \bar{r}^{\,///}) = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\sqrt{2}}{t} & -\dfrac{1}{t^2} \\ 0 & -\dfrac{\sqrt{2}}{t^2} & \dfrac{2}{t^3} \\ 0 & \dfrac{2\sqrt{2}}{t^3} & -\dfrac{6}{t^4} \end{vmatrix} = \frac{2\sqrt{2}}{t^6}.$$

Отже, $k = \chi = \frac{\sqrt{2}t^2}{(1+t^2)^2}$.

Знайдемо залежність між параметром t і довжиною дуги s.

$$s = \int_1^t \left|\bar{r}^{/}(t)\right| dt = \int_1^t \frac{t^2+1}{t^2} dt = \int_1^t (1 + t^{-2}) dt =$$

$$= \int_1^t dt + \int_1^t t^{-2}\, dt = \frac{t^2-1}{t}.$$

$$s = \frac{t^2-1}{t};$$

$$t^2 - st - 1 = 0.$$

$$t_{1,2} = \frac{s \pm \sqrt{s^2+4}}{2}; t = \frac{s + \sqrt{s^2+4}}{2}.$$

Підставимо вираз для t через s у вираз для k і χ. Після деяких перетворень знайдемо натуральні рівняння кривої:

$$k = \frac{\sqrt{2}\left(\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}\right)}{\left(1+\left(\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}\right)^2\right)^2} = \frac{4\cdot\sqrt{2}\left(s+\sqrt{s^2+4}\right)}{\left(4+\left(s+\sqrt{s^2+4}\right)^2\right)^2};$$

$$k = \chi = \frac{4\cdot\sqrt{2}\left(s+\sqrt{s^2+4}\right)}{\left(4+\left(s+\sqrt{s^2+4}\right)^2\right)^2}.$$

$$k = \frac{\sqrt{2}\cdot\left(\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}\right)}{\left(1+\left(\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}\right)^2\right)^2} = \frac{4\cdot\sqrt{2}\left(s+\sqrt{s^2+4}\right)^2}{\left(4+\left(s+\sqrt{s^2+4}\right)^2\right)^2}.$$

Відповідь: $k = \chi = \frac{4\cdot\sqrt{2}\left(s+\sqrt{s^2+4}\right)}{\left(4+\left(s+\sqrt{s^2+4}\right)^2\right)^2}$.

Завдання для аудиторної роботи

1. Знайти кривину плоскої кривої:

а) $y = \cos x$ в точці $x = \pi/3$; $x = 3$;

б) $y^2 = 2px$ в точці $x = 1$, $y = 0{,}44$, $p = 0{,}1$; $x = 0{,}5$, $y = -1$, $p = 1$;

в) $x = t^2, y = t^2 + 2$;

г) $x = a\cos t\,, y = b\sin t\,$;

д) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

е) $\rho = a(1 + \cos\phi)$.

2. Знайдіть кривину і скрут просторової кривої:

а) $\vec{r}(t) = A\{t, t^2, t^3\}$ у точці $M(0; 0; 0)$;

б) $\vec{r}(t) = \left\{e^t, e^{-t}, t\sqrt{2}\right\}$ в довільній точці;

в) $x^2 - 3y = 0,\ 2xy - 9z = 0$ у точці $M(0; 0; 0)$.

3. Знайти натуральне рівняння кривої:

а) $x = -\frac{1}{2}cost + 3;\ y = \frac{1}{2}sint + 5;$

б) $\vec{r}(t) = \{4t, 3sint, 3cost\}$.

4. При якому значенні w скрут кривої $\vec{r}(t) = \{Acost, Asint, wt\}$ максимальний?

5. На кривій $\vec{r(t)} = \{At, Asint, Asin3t\}$ знайти точки з нульовою кривиною.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти кривину наступних кривих:

а) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$;

б) $y^2 = 8x$;

в) $\rho^2 = a^2 \cos 2\phi$.

2. Знайдіть кривину і скрут:

а) $\vec{r} = \{3t - t^3, t^3 + 3t, 3t^2 + 5\}$, у точці $M(t = 0)$;

б) $x^2 + z^2 - y^2 = 1, y^2 - 2x + z = 0$ в точці $M(1;\ 1;\ 1)$.

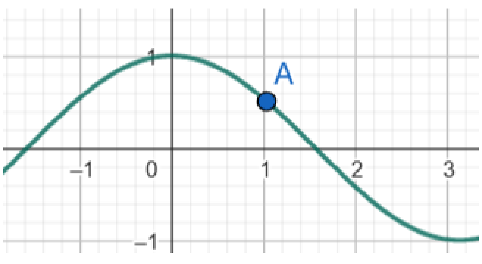
3. Доведіть, що лінія є прямою тоді і тільки тоді, коли кривина її дорівнює нулю.

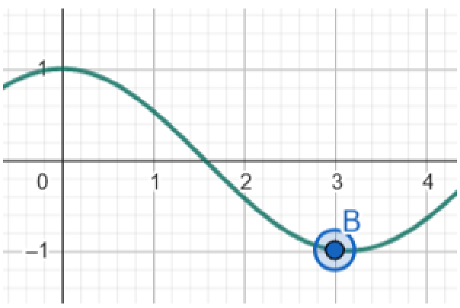
4. Складіть натуральне рівняння лінії $\vec{r}(t) = \{t\sqrt{2}, e^t, e^{-t}\}$.

Відповіді

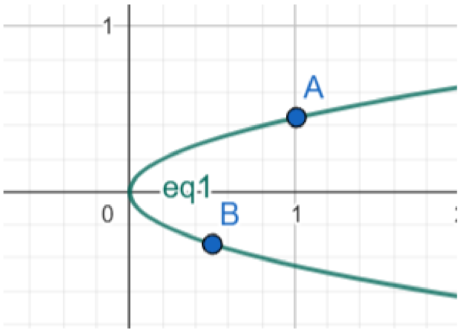
Завдання для аудиторної роботи

1. а) k=-0.22 k=0,96





б)



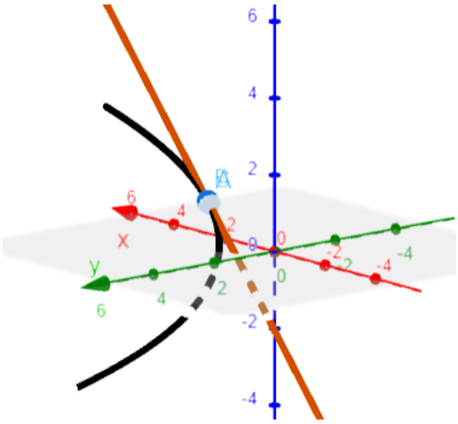
k=0,1; k=0,35

в) k=0

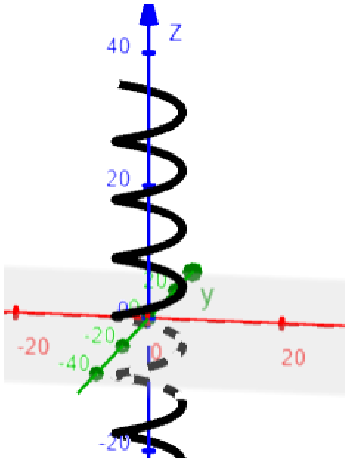
д) $k = \frac{a^2b^2(a^2y^2+b^2x^2)}{(b^4x^2+a^4y^2)^{3/2}}$

е) $k = \frac{a(2cos\varphi+sin^2\varphi)}{\sqrt{8}(1+cos\varphi)^{3/2}}$

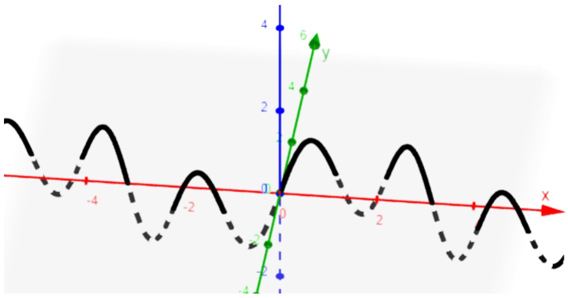
2.б) $k = -\chi = \frac{\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2}$



4.$\chi = \frac{w}{w^2+1}$, w=1

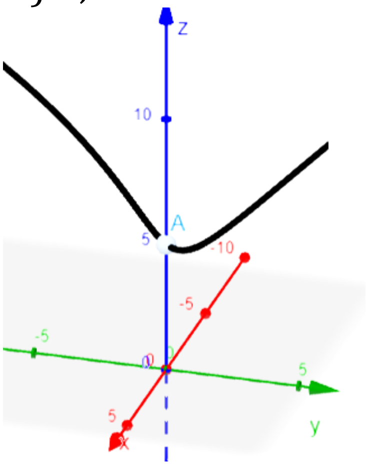


5. для a=1, (πn,0,0), $n\epsilon Z$

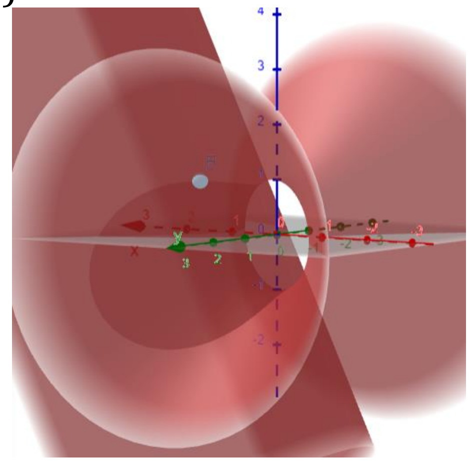


Завдання для самостійної роботи

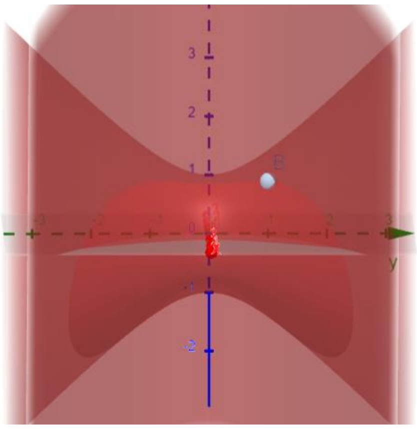
2. а) 0,33



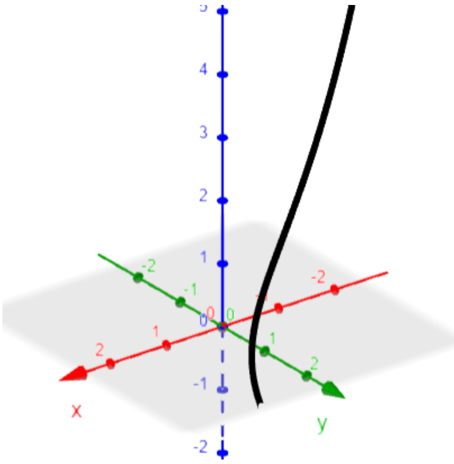
б)



3.



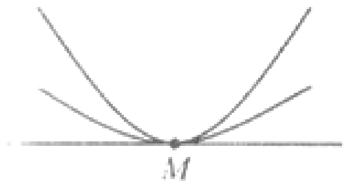
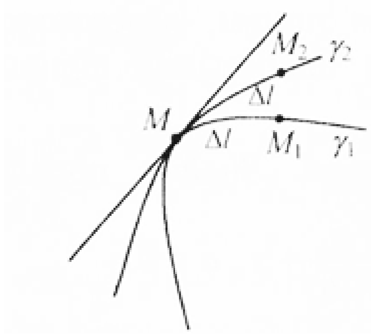
4.



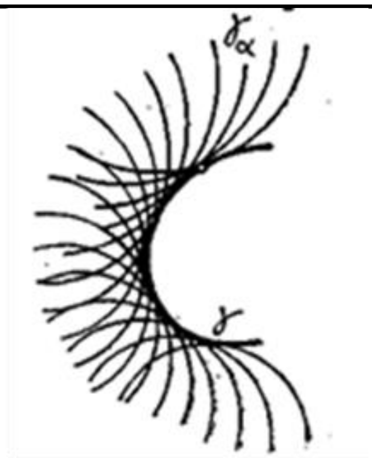
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 5
ДОТИК ПЛОСКИХ КРИВИХ. ОБВІДНА СІМ'Ї КРИВИХ. ЕВОЛЮТА ТА ЕВОЛЬВЕНТА ПЛОСКИХ КРИВИХ

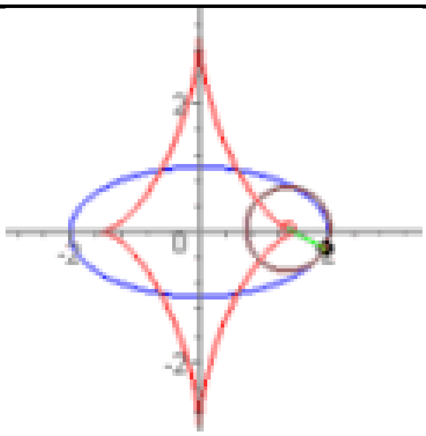
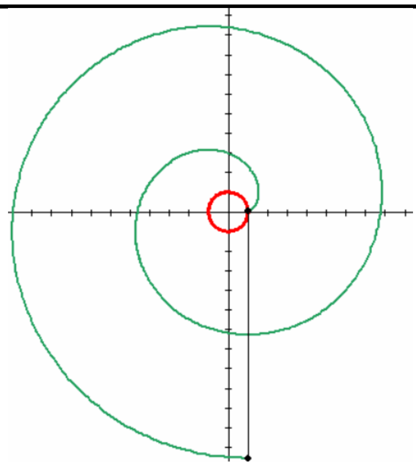
1. *Дотик плоских кривих*
2. *Стичне коло, центр кривини, радіус кривини*
3. *Обвідна*
4. *Еволюта*
5. *Евольвента*

Короткі теоретичні відомості

Нехай γ і γ' – елементарні криві, що мають спільну точку O. Візьмемо на кривій γ' точку P і позначимо h її відстань від кривої γ, а d – відстань від точки O. Крива γ' має з кривою γ в точці O **дотик порядку** n, якщо відношення $\frac{h}{d^n} \to 0$, коли $P \to O$	
Якщо кут між дотичними, проведеними до різних кривих в одній точці, рівний нулю, то *криві дотикаються.* Якщо кут між дотичними дорівнює нулю, це означає, що дотичні збігаються, тобто вони лежать на одній прямій. Це означає, що криві мають однаковий напрямок в спільній точці, тобто вони дотикаються	Кут між дотичними показує, наскільки сильно відрізняються напрямки кривих у цій точці 
Якщо для кривих γ і γ', що дотикаються, виконується умова $$\lim_{\Delta l} \frac{\lvert M_1M_2 \rvert}{\Delta l^k} = 0$$ то криві γ і γ' мають дотик k-го порядку.	 Якщо криві задані рівняннями $y = f_1(x), y = f_2(x)$, то умовою дотику поряду k

	є умова: $$f_1{}^{/}(x_0) = f_2{}^{/}(x_0), \ldots,$$ $$f_1{}^{(k)}(x_0) = f_2{}^{(k)}(x_0),$$ $$f_1{}^{(k+1)}(x_0) \neq f_2{}^{(k+1)}(x_0)$$
Стичним колом (дотичним колом) називається коло, яке має з кривою в даній точці дотик другого порядку. Тобто крива і коло мають не лише спільну дотичну в певній точці, а й мають однакову кривину. Це коло, яке найбільш тісно прилягає до кривої в цій точці	***Центром кривини*** називається центр стичного кола. Радіусом кривини називається число, обернене до значення кривини в даній точці. Радіус стичного кола тотожно дорівнює радіусу кривини
Дотик	
Першого порядку (звичайний) Криві дотикаються, але одна крутіша за іншу	Це як наближення функції прямою лінією (дотичною). У точці дотику значення функції та її перша похідна (нахил) збігаються зі значенням та похідною дотичної. Криві «дотикаються», але можуть швидко розходитися
Другого порядку (стичне коло) Криві дотикаються, мають однакову кривину	Це як наближення функції параболою (або колом, як окремим випадком). У точці дотику збігаються значення функції, її перша та друга похідні (кривина).

Третього порядку Криві збігаються ще тісніше, враховуючи зміну кривини	Це як наближення функції кубічною параболою. У точці дотику збігаються значення функції, її перша, друга та третя похідні
Вищого порядку Криві практично «зливаються» в околі точки дотику, їх відмінність стає все менш помітною	Це наближення поліномами вищих ступенів. Збігаються значення функції та її похідні до відповідного порядку
Розглянемо сім'ю гладких кривих на площині, параметризованих змінною α. Гладка крива γ називається **обвідною** цієї сім'ї, якщо для кожної точки на γ існує крива із сім'ї, яка має спільну дотичну з γ у цій точці. І кожен відрізок γ дотичний до нескінченної кількості кривих з сім'ї	
Нехай криві γ_c сім'ї S в області G задаються рівняннями F(x, y, c) = 0, $a<c<b$, де F – функція, що неперервно диференціюється по всіх аргументах, і задовольняє умові $F'^2_x+F'^2_y \neq 0$.	Тоді обвідна γ сім'ї S (якщо вона існує) задається системою рівнянь $\begin{cases} F(x,y,c)=0 \\ F_c^{/}(x,y,c)=0. \end{cases}$
Еволютою кривої називається геометричне місце	**Евольвентою** кривої γ називається така крива $\tilde{\gamma}$,

центрів кривини кривої, якщо воно утворює криву. Тобто, якщо взяти всі центри кривини для кожної точки на вихідній кривій, то вони утворять нову криву – еволюту. **Еволюта** – обвідна нормалей, проведених до кожної точки плоскої кривої	по відношенню до якої крива γ є еволютою. **Евольвента** – крива, нормаль в кожній точці якої, є дотичною до вихідної кривої
 Еволюта еліпса – астроїда	 Евольвента кола
Рівняння еволюти для параметрично заданої кривої γ: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ визначається координатами центру стичного кола	$\tilde{x} = x - y' \dfrac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}$ $\tilde{y} = y + x' \dfrac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}$
Рівняння евольвенти для параметрично заданої кривої γ: $\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t). \end{cases}$	$\tilde{x} = x - x' \dfrac{\int_a^t \sqrt{x'^2 + y'^2}dt}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$ $\tilde{y} = y - y' \dfrac{\int_a^t \sqrt{x'^2 + y'^2}dt}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$

Типові завдання

№1. Знайти порядок дотику кривих $y_1 = \sin x$, $y_2 = ax^4 - \frac{x^3}{6} + x, a \neq 0$ в точці (0; 0).

Розв'язання:

$$y_1 = \sin x\,, y_2 = ax^4 - \frac{x^3}{6} + x, a \neq 0.$$

З'ясуємо порядок дотику:

$y_1^{/} = \cos x\,|_{x=0} = 1;$ $\quad y_2^{/} = \left(4ax^3 - \frac{x^2}{2} + 1\right)|_{x=0} = 1;$

$y_1^{//} = -\sin x\,|_{x=0} = 0;$ $\quad y_2^{//} = (12ax^2 - x)|_{x=0} = 0;$

$y_1^{///} = -\cos x\,|_{x=0} = -1;$ $\quad y_2^{///} = (24ax - 1)|_{x=0} = -1;$

$y_1^{(4)} = \sin x\,|_{x=0} = 0.$ $\quad y_2^{(4)} = 24a|_{x=0} = 24a \neq 0.$

Оскільки, $y_1^{(4)} \neq y_2^{(4)}$, то криві мають дотик 3-го порядку (рис.5.1).

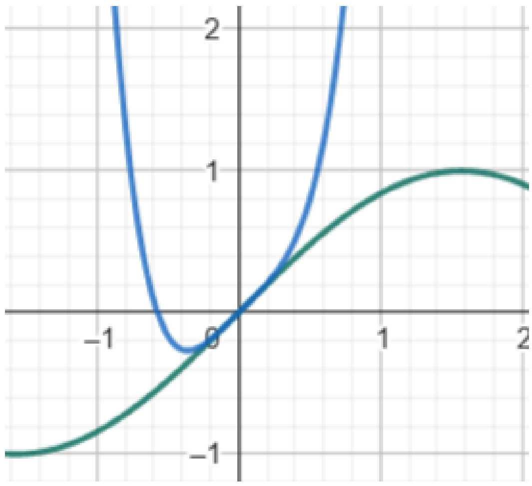


Рис.5.1

Відповідь: дотик 3 порядку.

№2. Знайти обвідну сім'ї заданих кривих

а) $c^2(x-2) - cy - 4 = 0$; б) $x^2 + (y-a)^2 - 4 = 0$.

Розв'язання:

а) $\boldsymbol{c^2(x-2) - cy - 4 = 0}$.

Задана сім’я прямих ліній.

Для знаходження обвідної потрібно розв’язати систему відносно параметра с:

$$\begin{cases} F(x,y,c) = 0; \\ F_c^{/}(x,y,c) = 0. \end{cases}$$

Знайдемо похідну:

$$F_c^{/} = 2c(x-2) - y.$$

Складемо систему:

$$\begin{cases} c^2(x-2) - cy - 4 = 0; \\ 2c(x-2) - y = 0. \end{cases}$$

З системи виразимо с:

$$c = \frac{y}{2(x-2)}.$$

Підставимо знайдене значення c в початкову умову і отримаємо:

$$\frac{y^2}{4(x-2)^2}(x-2) - \frac{y}{2(x-2)} - 4 = 0.$$

Розкриємо дужки, зведемо подібні доданки і отримаємо:

$$\frac{y^2}{4(x-2)} - \frac{y}{2(x-2)}y - 4 = 0;\ \frac{y^2 - 2y^2}{4(x-2)} = 4;$$

$$\frac{-y^2}{4(x-2)} = 4;$$

$$y^2 = -16(x-2);$$

$$y^2 = 32 - 16x.$$

Обвідною заданої сім’ї кривих є парабола (рис.5.2 а).

Відповідь: парабола $y^2 = 32 - 16x$.

б) $\boldsymbol{x^2 + (y-a)^2 - 4 = 0}$

Задана сім’я кіл. Знайдемо похідну: $F_a^{/} = -2(y-a)$.

Складемо систему:

$$\begin{cases} x^2 + (y - a)^2 - 4 = 0; \\ -2(y - a) = 0. \end{cases}$$

З отриманої системи виразимо параметр a:

$$y - a = 0;$$

$$a = y.$$

Підставимо знайдене значення в початкову умову:

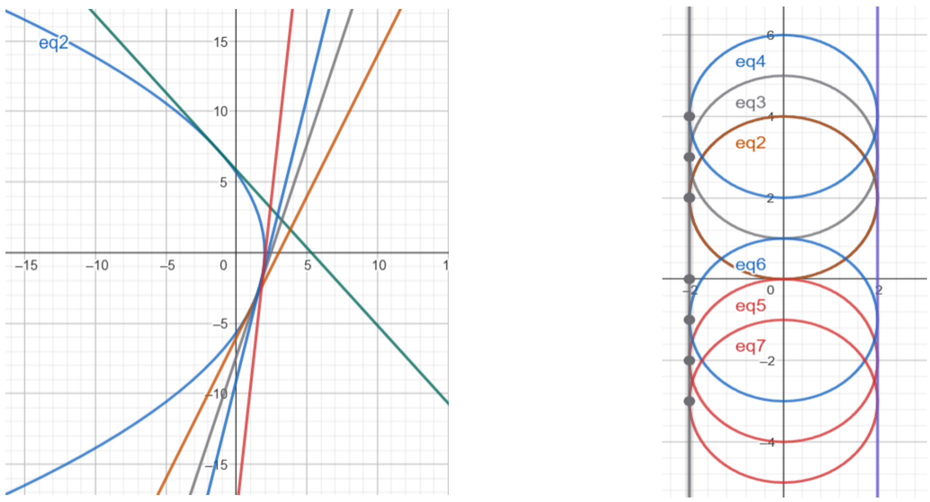
$$x^2 - (y - y)^2 - 4 = 0;$$

$$x^2 = 4;$$

$$x = \pm 2.$$

Обвідною заданої сім'ї кривих є прямі $x = \pm 2$ (рис.5.2.б).

Відповідь: прямі $x = \pm 2$.



а) б)

Рис.5.2

№3. Знайти рівняння еволюти кривої

а) $y = e^{\mathrm{x}}$; б) $y = x^2$.

Розв'язання:

а) $y = e^{\mathrm{x}}$.

Запишемо рівняння заданої кривої в параметричній формі:

$$\{x = t, y = e^t\}.$$

Тоді: $x^{/} = 1, x^{//} = 0, y^{/} = e^t, y^{//} = e^t$.

Рівняння еволюти будемо шукати за формулами:

$$X = x - y^{/}\frac{x^{/2} + y^{/2}}{x^{/}y^{//} - y^{/}x^{//}};$$

$$Y = y + x^{/}\frac{x^{/2} + y^{/2}}{x^{/}y^{//} - y^{/}x^{//}}.$$

Підставимо знайдені значення похідних у формули, отримаємо:

$$X = t - e^t \cdot \frac{1 + e^{2t}}{e^{2t}} = t - 1 - e^{2t},$$

$$Y = e^t + 1 \cdot \frac{1 + e^{2t}}{e^{2t}} = \frac{e^{2t} + 1 + e^{2t}}{e^t} = \frac{2e^{2t} + 1}{e^t} = 2e^t + e^{-t}.$$

Отже, параметричне рівняння еволюти за формулами обчислення центрів кривини має вигляд (рис.5.3.а):

$$\{X = t - 1 - e^{2t}, Y = 2e^t + e^{-t}\}.$$

Відповідь: $\{X = t - 1 - e^{2t}, Y = 2e^t + e^{-t}\}$.

б) $\boldsymbol{y = x^2}$

Запишемо рівняння заданої кривої в параметричній формі:

$$\{x = t, y = t^2\}$$

Знайдемо похідні:

$$x^{/} = 1, x^{//} = 0, y^{/} = 2t, y^{//} = 2.$$

Тоді підставивши знайдені похідні у формули маємо:

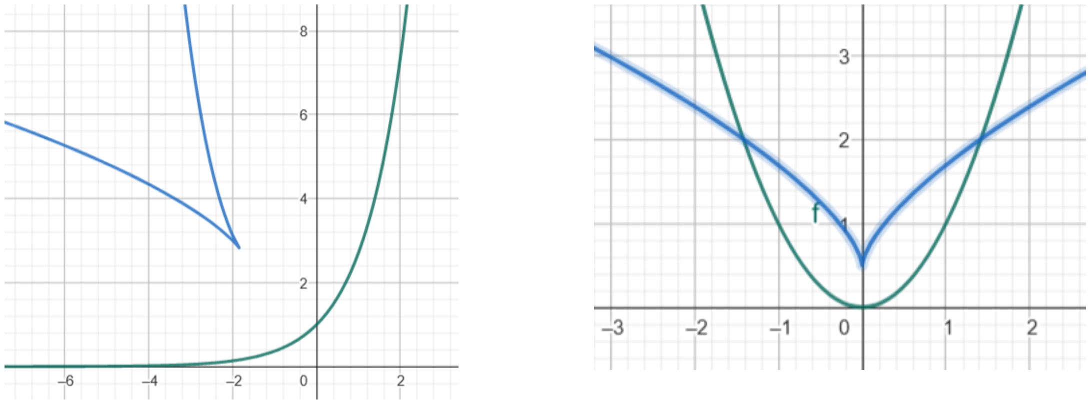
$$X = t - 2t \cdot \frac{1 + 4t^2}{2 - 0} = t - t - 4t^3 = -4t^3,$$

$$Y = t^2 + 1 \cdot \frac{1 + 4t^2}{2 - 0} = \frac{2t^2 + 1 + 4t^2}{2} = 3t^2 + \frac{1}{2}.$$

Отже, параметричне рівняння еволюти за формулами обчислення центрів кривини має вигляд (рис.5.3. б):

$$\left\{X = -4t^3, Y = 3t^2 + \frac{1}{2}\right\}.$$

Відповідь: $\left\{X = -4t^3, Y = 3t^2 + \frac{1}{2}\right\}$.



а) б)

Рис.5.3

№4. Знайти рівняння стичного кола до кривої y=2x²+2x+1 у точці *M*(0;1).

Розв'язання:

Дотичне коло має з кривою дотик другого порядку. Тому шукаємо першу і другу похідні в точці *M*:

$$y' = 4x + 2|_M = 2, y'' = 4.$$

1 спосіб. Розглянемо загальне рівняння кола: $x^2+y^2+Ax+By+C=0$, знайдемо коефіцієнти з умови: точка *M* належить колу (точка дотику), перша і друга похідна в точці *M* дорівнює відповідно першій і другій похідній від функції, що задає криву.

Підставимо точку *M* у рівняння кола:

$$1+B+C=0 \qquad (1)$$

Знаходимо похідну від неявно заданої функції, пам'ятаючи, що *y* залежить від *x*:

$2x+2yy'+A+By'=0$, $y'=-(2x+A)/(2y+B)|_M=-A/(2+B)=2$,

$$-A=4+2B, \qquad (2)$$

$$y'' = -\left(\frac{2(2y+B)-(2x+A)2y'}{(2y+B)^2}\right)\Big|_M = \frac{-4-2B+4A}{(2+B)^2} = 4. \quad (3)$$

Маємо систему:

$$\begin{cases} 1 + B + C = 0; \\ -A = 4 + 2B; \\ -4 - 2B + 4A = 4(2 + B)^2. \end{cases}$$

Розв'язавши яку отримуємо:

$A_1 = 0, B_1 = -2, C_1 = 1; A_2 = 5, B_2 = -4{,}5, C_2 = 3{,}5.$

Маємо такі рівняння:

1) $x^2+y^2-2y+1=0$, $x^2+(y-1)^2=0$ – коло, що вироджується в точку.
2) $x^2+y^2+5x-4{,}5y+3{,}5=0$, $(x+2{,}5)^2+(y-2{,}25)^2=125/16$ – дотичне коло (рис.5.4)

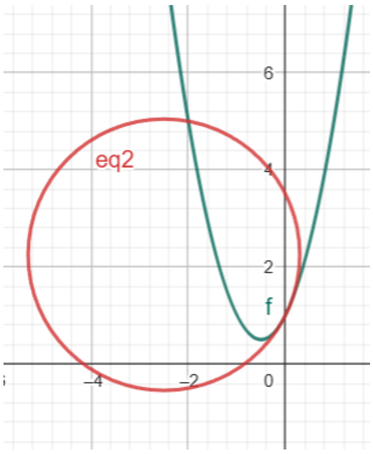


Рис.5.4

2 спосіб. Обчислимо радіус стичного кола: $R=1/k$,

$$k = \left| \frac{f^{//}}{\left(1+\left(f^{/}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right|;$$

$$k = \frac{4}{5\sqrt{5}}, \; R = \frac{5\sqrt{5}}{4}.$$

Центр стичного кола шукаємо за формулами:

$$a = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = \frac{-5}{2}, \; b = y + \frac{(1+y'^2)}{y''} = \frac{9}{4}.$$

$(x+2{,}5)^2+(y-2{,}25)^2=125/16$ – стичне коло.

Відповідь: $(x+2{,}5)^2+(y-2{,}25)^2=125/16$.

Завдання для аудиторної роботи

1. Знайти порядок дотику наступних пар кривих в точці $O(0;\,0)$:

   а) $x = \sin t\,, y = t^2$ $і$ $x^2 = 2y + y^2$;

   б) $y = x^2 + 4x^3$ $і$ $y = 3x^2 + 2x^4$;

   в) $y = x^3 + 2x^5$ $і$ $y = 2x^3 - x^4$.

2. Знайдіть рівняння параболи у вигляді $y = x^2 + ax + b$, яка дотикається кола x^2+y^2=2 в точці (1;1).

3. Довести, що криві $y = \sin x$ $і$ $y = x^4 - \frac{1}{6}x^3 + x$ мають в початку координат дотик третього порядку.

4. Скласти рівняння кола, яке має з параболою $y = 2(\mathrm{x} - 1)^2$ в її вершині дотик другого порядку.

5. Довести, що коло $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 8$ і парабола $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ мають в точці $M(1;\,1)$ дотик третього порядку.

6. Дослідіть сім'ю ліній і зробіть рисунок:

$$C^2x^2 + y^2 = Cx.$$

7. Знайдіть обвідну наступних сімей кривих (з особливими точками):

   а) $(x-c)^2 + y^2 = a^2$; б) $y = (x-C)^3$;

   в) $C^2(x-a) - Cy - a = 0$.

8. Складіть рівняння і зобразіть еволюти наступних кривих:

   а) $x = a\cos t\,, y = b\sin t$; б) $y = \ln x$.

9. Складіть рівняння евольвенти кола $x^2 + y^2 = a^2$ і зробіть рисунок.

10. Знайти рівняння стичного кола до кривої $y=x^2+x-1$ у точці $M(0; -1)$, зробити рисунок.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти порядок дотику наступних пар кривих в точці $O(0;0)$:

   а) $x = t, y = t^2$ $і$ $x^2 = 4y - 2y^2$;

   б) $y = cos\, x - 1$ $і$ $y = x^2$.

2. Знайти гіперболу, яка дотикається до кривої $y = 1 - cos\, x$ в початку координат і має з нею в цій точці найбільший порядок дотику. З'ясуйте цей порядок.

3. Знайти радіус кривини кривої Штейнера (рис.5.5)

$$x = 2r\, cos\frac{t}{3} + r\, cos\frac{2t}{3},\ y = 2\, sin\frac{t}{3} - r\, sin\frac{2t}{3}$$ в довільній точці.

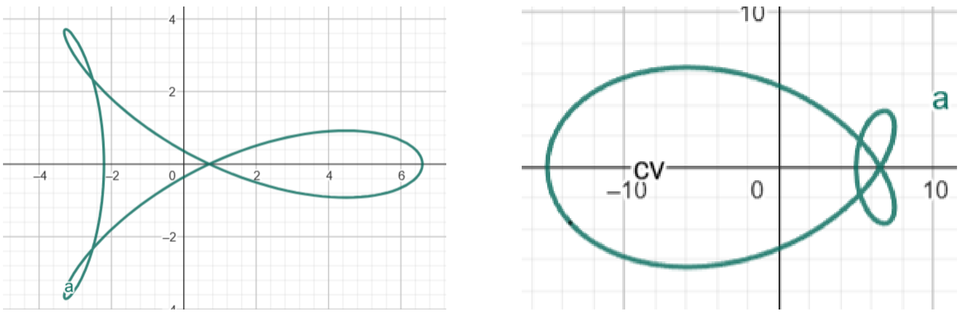


Рис.5.5 (r = 2,2; r = -5)

4. Знайти еволюти і радіус кривини наступних кривих:

   а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; б) $\rho = \lambda\phi$.

5. Знайти обвідну сім'ї кривих:

   а) $x^2 + (y - a)^2 = r^2$; б) $x + ay + 1 = 0$.

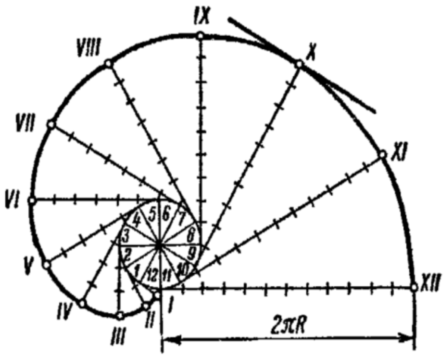
6. Знайти рівняння стичного кола до кривої $y=x\ln x+1$ у точці $M(1; 1)$, зробити рисунок.

Відповіді

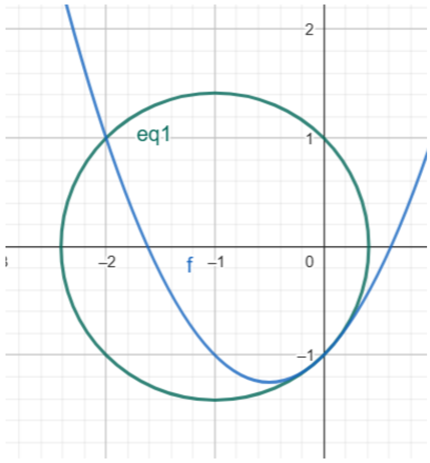
Завдання для аудиторної роботи

1. а)1; б)1; в)2. *2.* $y=x^2-3x+3$. *4.* $(x-1)^2+(y-0,25)^2=1/16$.*6.* Сім'я еліпсів. 7. а) $y = a$, $y = -a$; б) $y = 0$; в) парабола.

9.



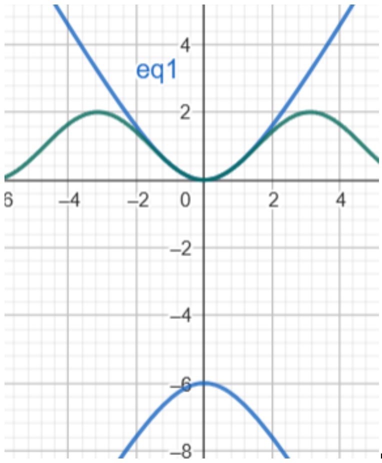
10. $(x+1)^2+y^2=2$.



Завдання для самостійної роботи

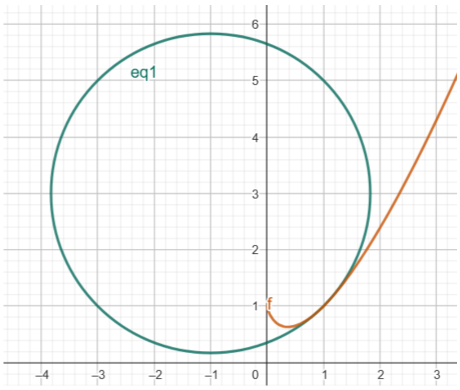
2. Розглянути гіперболу у вигляді $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey=0$; четвертого порядку;

$-x^2/2+y^2/6+y=0$.



3. $R=8r\sin(t/2)$.

6. $(x+1)^2+(y-3)^2=8$.

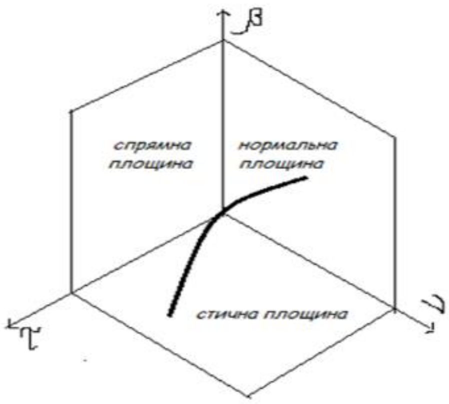


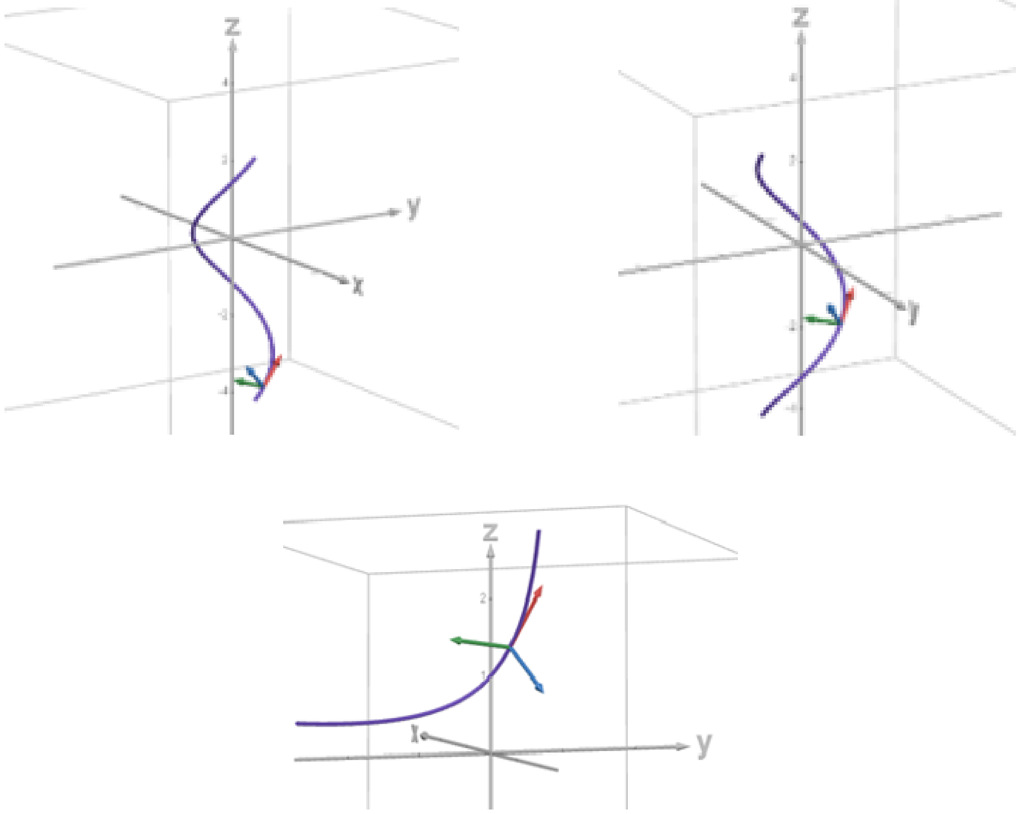
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 6
ФОРМУЛИ ФРЕНЕ. СУПРОВОДЖУЮЧИЙ ТРИГРАННИК ФРЕНЕ

1. Формули Френе
2. Супроводжуючий триграннник Френе

Короткі теоретичні відомості

<table>
<tr><td colspan="2">Просторову криву характеризують три основні вектори: вектор дотичної прямої $\vec{\tau}$, головної нормалі $\vec{\nu}$ та бінормалі $\vec{\beta}$</td></tr>
<tr><td>Вектор, який перпендикулярний до дотичної прямої і лежить у площині, що найкраще наближає криву в даній точці є вектором головної нормалі</td><td>Це напрям, у якому крива найбільше відхиляється від своєї дотичної.
Уявіть собі, що ви їдете по кривій дорозі: головна нормаль вказує у напрямку, куди вас «відкидає» від дороги через відцентрову силу</td></tr>
<tr><td>Вектор перпендикулярний як до дотичної, так і до головної нормалі – бінормаль. Він доповнює дотичну та головну нормаль до ортогональної трійки векторів</td><td>Бінормаль вказує напрям, у якому крива «виходить» із площини, що визначається дотичною і головною нормаллю</td></tr>
<tr><td colspan="2">Формули Серре-Френе</td></tr>
<tr><td>$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}$$</td><td>Швидкість зміни кривої дорівнює вектору дотичної</td></tr>
</table>

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{\nu}$$	Дотична змінюється пропорційно головній нормалі та кривині. Це означає, що швидкість зміни напряму дотичної (тобто кривина) визначає, наскільки швидко крива відхиляється від прямої лінії
$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = -k\vec{\tau} + \chi\vec{\beta}$$	Головна нормаль змінюється пропорційно дотичній (з від'ємним знаком), що пов'язано зі зміною напряму кривини, та бінормалі, що пов'язано зі скручуванням
$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = -\chi\vec{\nu}$$	Бінормаль змінюється пропорційно головній нормалі та скруту. Це демонструє те, що скрут визначає швидкість зміни площини, у якій лежить крива
Супроводжуючий тригранник Френе	
Три напівпрямі, що виходять з точки кривої і що мають напрями векторів $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ є ребрами тригранного кута. Цей тригранний кут називається **натуральним тригранником** або **тригранником Френе**	 Якщо крива задана довільним параметром, то:

<table>
<tr><td></td><td>$$\vec{\tau}=\frac{\vec{r}^{/}}{|\vec{r}^{/}|},\vec{\beta}=\frac{[\vec{r}^{/}\times\vec{r}^{//}]}{|[\vec{r}^{/}\times\vec{r}^{//}]|},$$
$$\vec{\nu}=[\vec{\beta}\times\vec{\tau}]$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">
У кожній точці кривої свій тригранник Френе
(червоний - $\vec{\tau}$, зелений - $\vec{\nu}$, синій - $\vec{\beta}$)</td></tr>
</table>

Типові завдання

№1. Складти рівняння всіх ребер і граней тригранника

Френе кривої $\begin{cases} \boldsymbol{x^2+2y^2-z^2=2,} \\ \boldsymbol{2x^2+y^2-3=0} \end{cases}$ **в точці** $\boldsymbol{A(1;1;1)}$.

Розв'язання:

Оскільки крива задана як перетин двох поверхонь (рис.6.1), то за параметр візьмемо x і знайдемо похідні від неявно заданих функцій, враховуючи, що y і z є залежними від x:

$$\begin{cases} x+2yy'_x-zz'_x=0, \\ 2x+yy'_x=0. \end{cases}$$

Оскільки ми складаємо тригранник Френе в точці A, то підставимо її координати:

$$\begin{cases} 1 + 2y'_x - z'_x = 0, \\ 2 + y'_x = 0. \end{cases}$$

Звідки $y'_x = -2,\ z'_x = -3$. Отже, в точці A вектор першої похідної має координати $\vec{r'} = \{1; -2; -3\}$.

Знайдемо другу похідну по x:

$$\begin{cases} 1 + 2{y'_x}^2 + 2yy''_{xx} - {z'_x}^2 - zz''_{xx} = 0, \\ 2 + {y'_x}^2 + yy''_{xx} = 0. \end{cases}$$

Підставимо в отриману систему координати точки A і знайдені значення перших похідних: $y''_{xx} = -6,\ z''_{xx} = -12$. Тоді в точці A вектор другої похідної має координати

$$\vec{r''} = \{0; -6; -12\}.$$

Оскільки довжина напрямного вектора не відіграє істотної ролі, то замість вектора $\vec{r''} = \{0; -6; -12\}$ візьмемо колінеарний до нього вектор $\{0; -1; -2\}$.

Вектор $\vec{r'} = \{1; -2; -3\}$ є напрямним вектором дотичної і нормальним вектором нормальної площини кривої в заданій точці. Тому рівняння дотичної має вигляд:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-3},$$

а рівняння нормальної площини

$$x - 1 - 2(y - 1) - 3(z - 1) = 0,$$

$$x - 2y - 3z + 4 = 0.$$

Напрямний вектор бінормалі, що виступає й за нормальний вектор стичної площини, в точці A визначається так:

$$\vec{\beta} = \lambda\left[\vec{r}', \vec{r}''\right] = \lambda\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \lambda(-\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}).$$

Отже, рівняння бінормалі:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1},$$

а рівняння стичної (дотичної) площини:

$$-(x-1) - 2(y-1) + (z-1) = 0.$$

$$-x - 2y + z + 2 = 0.$$

Напрямний вектор головної нормалі, який є нормальним вектором спрямної площини, в точці A визначається так:

$$\vec{\nu} = \mu\left[\vec{\beta}, \vec{r}'\right] = \mu\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \mu(-8\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}) =$$

$$= 2\mu(4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}).$$

Тоді рівняння головної нормалі:

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2},$$

а рівняння спрямної площини

$$4(x-1) - (y-1) + 2(z-1) = 0,$$

$$4x - y + 2z + 1 = 0.$$

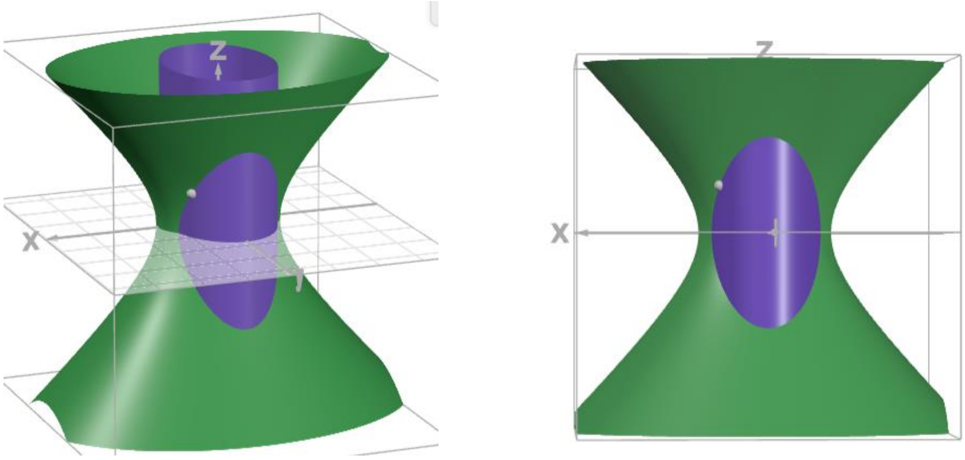


Рис.6.1.

Відповідь:

$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-3}$ – рівняння дотичної;

$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1}$ – рівняння бінормалі;

$\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ – рівняння головної нормалі;

$x - 2y - 3z + 4 = 0$ – рівняння нормальної площини;

$-x - 2y + z + 2 = 0$ – рівняння стичної площини;

$4x - y + 2z + 1 = 0$ – рівняння спрямної площини.

Завдання для аудиторної роботи

1. Знайдіть дотичну площину кривої $x = t, y = t^2, z = t^3$, що проходить через точку А$(2; -\frac{1}{3}, -6)$.

2. Напишіть рівняння дотичної площини кривої $x = a\cos t, y = b\sin t, z = e^t$ в точці $t = 0$.

3. Складіть рівняння головної нормалі і бінормалі кривої у вказаній точці: $x = t, y = t^2, z = e^t, t = 0$.

4. Знайдіть одиничні вектори дотичної, головної нормалі і бінормалі кривої $x = t\sin t, y = t\cos t, z = te^t$ в початку координат.

5. Складіть рівняння дотичної, нормальної площини, бінормалі і спрямної площини гвинтової лінії $x = \cancel{=} a\cos t, y = a\sin t, z = bt$. Доведіть, що головна нормаль перетинає вісь гвинтової лінії під прямим кутом, а бінормаль утворює з нею постійний кут. Знайдіть вектори репера Френе.

Завдання для самостійної роботи

1. Складіть рівняння дотичної до лінії $\vec{r} = \{t^2, t, e^t\}$, паралельної площині x-2y-5=0.
2. Знайдіть рівняння ребер і граней тригранника Френе для наступних ліній:

   а) $\vec{r} = \{t, t^3, t^2 + 4\}, t = 1$;

   б) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = 2, \\ x^2 + z^2 = 25. \end{cases}$ $M(1; 1; 1)$.

3. Знайдіть одиничні вектори дотичної, бінормалі та головної нормалі кривих:

   а) $\vec{r} = \{t, t^2, t^3\}$ в точці $t = 0$;

   б) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$ в точці $M(1; 1; 1)$.

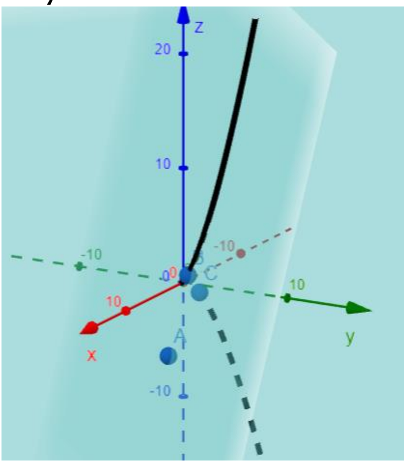
4. Знайдіть дотичну площину кривої $\vec{r} = \left\{t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3}\right\}$, яка проходить через точку $M(0; 0; 9)$.

5. Знайдіть головну нормаль кривої $x = a\cos t$, $y = \cancel{=}\ a\sin t, z = t$, перпендикулярну до вектора $\vec{a} = (1; 0; 3)$.

Відповіді

Завдання для аудиторної роботи

1. Точка A – не належить кривій, належить шуканій площині.



$t=1$: $3x - 3y + z - 1 = 0$;
$t=-1$: $3x + 3y + z + 1 = 0$;
$t=6$: $108x - 18y + z - 216 = 0$.

2. $bx+ay+abz-2ab=0$

4. $\vec{\tau} = (0; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$,
$\vec{\beta} == \frac{1}{\sqrt{3}}(1; 1; -1)$,
$\vec{\nu} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2; -1; 1)$.

Завдання для самостійної роботи

1. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-e}{e}$.

3. а) $\vec{\tau} = (1; 0; 0)$, $\vec{\beta} = (0; 0; 1)$, $\vec{\nu} = (0; 1; 0)$;

б) $\vec{\tau} = \frac{2}{\sqrt{17}}(1; -1; 1{,}5)$, $\vec{\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1; 1; 0)$, $\vec{\nu} = \frac{1}{\sqrt{34}}(3; -3; -4)$.

5. $\vec{\nu} = \mu\,(cost(a^3 - a); sint(-a^3 - a); a^2 sin2t)$,

$t = (-1)^k arcsin(\frac{a}{3} - \frac{1}{3a^2}) + \pi k, k \in Z$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 7
ДОСЛІДЖЕННЯ ПЛОСКИХ КРИВИХ

1. Характеристика плоскої кривої

Короткі теоретичні відомості

Дослідження лінії полягає у визначенні її характеристик, необхідних для її побудови. Основними характеристиками лінії є: наявність особливих точок, асимптот, точок, де дотичні паралельні координатним осям, а також точок перетину з осями координат і асимптотами	1. Точки перетину з осями координат. 2. Дотичні до кривої в цих точках. 3. Асимптоти. 4. Точки перетину кривої з асимптотами, якщо вони є. 5. Особливі точки кривої. Точки перегину. 6. Точки, в яких дотичні паралельні осям координат. 7. Осі симетрії

Типові завдання

№1. Дослідити та побудувати криву:

а) $x = t^3 + 1, y = t^2 - 1$;

б) $x^3 - y^2 + 1 = 0$;

в) $x = t^2; y = t^4 + t^5$;

г) $y = e^{-x^2}$.

Розв'язання:

а) $\boldsymbol{x = t^3 + 1, y = t^2 - 1}$.

1. Знайдемо точки перетину з осями координат.

З віссю *OX*: $y = 0, t = 1, t = -1, x = 2, x = 0, A(2; 0)$.

З віссю *OУ*: $x = 0, t = -1, y = 0, O(0; 0)$.

2. Знайдемо асимптоти.

Вертикальних асимптот нема. Шукаємо похилу та/або горизонтальну асимптоту.

$$k = \lim_{t\to\infty}\frac{t^2-1}{t^3+1} = 0, b = \lim_{t\to\infty}(t^2-1) - 0 = \infty.$$

Асимптот нема.

3. Знайдемо дотичні кривої.

В точці $t = 1$.

$$x^{/} = 3t^2|t = 1 = 3,$$

$$y^{/} = 2t|t = 1 = 2.$$

$$x(t = 1) = 2,$$

$$y(t = 1) = 0.$$

Рівняння дотичної матиме вигляд:

$\frac{x-2}{3} = \frac{y}{2}, 2x - 3y - 4 = 0, y = \frac{2}{3}(x-2).$

В точці $t = -1$.

$$x^{/} = 3t^2|t = -1 = 3,$$

$$y^{/} = 2t|t = -1 = -2.$$

$$x(t = -1) = 0, y(t = -1) = 0.$$

Рівняння дотичної матиме вигляд:

$\frac{x}{3} = \frac{y}{-2}, -2x = 3y, y = -\frac{2}{3}x.$

4. Знайдемо точки, в яких дотичні паралельні осям:

$$tg\alpha = \frac{y^{/}}{x^{/}}.$$

При $t = 0$ дотична паралельна осі ординат, тобто в точці $B(1; -1)$.

5. Знайдемо точки перегину:

$$x^{//} = 6t,$$

$$y^{//} = 2.$$

Знайдемо знак виразу: $x^{/}y^{//} - y^{/}x^{//}$.

$$3t^2 \cdot 2 - 2t \cdot 6t = -6t^2.$$

Оскільки $x^{/}y^{//} - y^{/}x^{//} < 0$, то крива опукла вниз.

$$-6t^2 = 0, t = 0, x = 1, y = -1.$$

Точка B(1; -1) – особлива точка.

Якщо з рівняння кривої вилучити параметр t, то отримаємо рівняння:

$$-(y+1)^3 + (x-1)^2 = 0,$$

яке визначає напівкубічну параболу.

6. Отже, крива матиме вигляд :

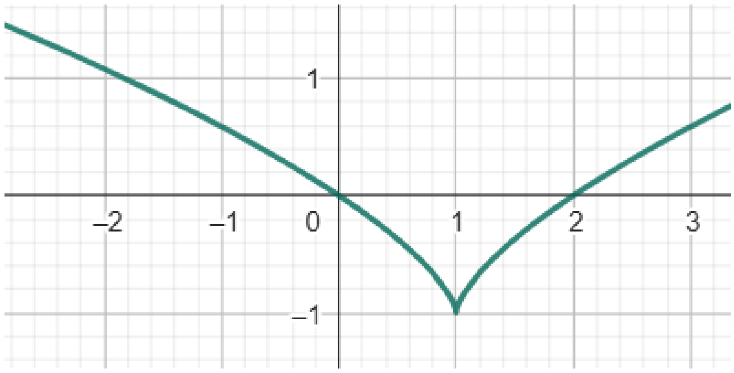


Рис.7.1

б) $\mathbf{x^3 - y^2 + 1 = 0}$.

1. Знайдемо точки перетину з осями координат.

З віссю OX: $y = 0, x = -1$.

З віссю OY: $x = 0, y = \pm 1$.

$$M_1(-1; 0), M_{2,3} = (0; \pm 1).$$

2. Крива має вертикальну асимптоту, оскільки рівняння третього порядку, а не містить y^3.

Якщо $x = a$ – вертикальна асимптота, тоді: $y^2 = 1 - a^3$. Степінь отриманого рівняння n = 3, тому коефіцієнти многочлена матимуть вигляд:

$B_0 = 0, B_1 = 0, B_2 = 1, B_3 = a^3 - 1$

Щоб знайти a розв'яжемо рівняння $a^3+1= 0$, a = –1, $x = \cancel{=}-1$.

Нехай рівняння похилої асимптоти $y = kx + b$. Маємо:

$$x^3 - (kx + b)^2 + 1 = 0.$$

Розкриємо дужки і згрупуємо змінні при старших степенях:

$$x^3 - k^2x^2 - 2kx - b^2 + 1 = 0.$$

Складемо систему:

$$\begin{cases} 1 = 0; \\ -k^2 = 0. \end{cases}$$

Отже, похилої асимптоти не існує.

3. Знайдемо особливі точки.

$$F_x^{/} = 3x^2;$$

$$F_y^{/} = -2y.$$

$$\begin{cases} 3x^2 = 0; \\ -2y = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0; \\ y = 0. \end{cases}$$

Отримали точку $O(0;\,0)$, підставимо знайдені значення x та y в початкову умову, отримаємо: $0 - 0 + 1 \neq 0$.

Отже, крива не має особливих точок.

4. Знайдемо точки перегину.

$$F_x^{/} = 3x^2|_{M_1} = 3, F_y^{/} = -2y|_{M_1} = 0,$$

$$F_{xx}^{//} = 6x, F_{xx}^{//} = 6x|_{M_1} = -6,$$

$$F_{yy}^{//} = -2, F_{yy}^{//} = -2|_{M_1} = -2.$$

Оскільки, $F_x^{/}F_{yy}^{//} - F_y^{/}F_{xx}^{//} < 0,$ то крива опукла вниз.

$$F_{xx}^{//} = 6x|_{M_{2,3}} = 0$$

$$F_{yy}^{//} = -2.\, F_x^{/} = 3x^2|_{M_{2,3}} = 0$$

Оскільки, $F_x^{/}F_{yy}^{//} - F_y^{/}F_{xx}^{//} = 0,$

То точки $M_{2,3} = (0; \pm 1)$ – точки перегину.

Отже, крива матиме вигляд, представлений на рис.7.2.

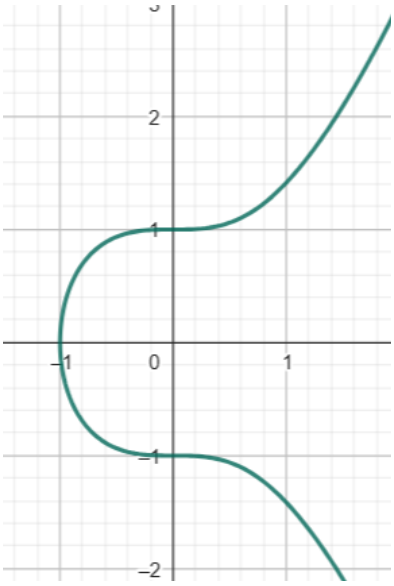


Рис.7.2.

в) $\boldsymbol{x = t^2; y = t^4 + t^5}$.

1. Знайдемо точки перетину з осями координат.

$$y = 0,$$
$$t = 0, t = -1,$$
$$x = 0, x = 1. x = 0, y = 0.$$

Отже, $O(0;\ 0)$, $M(1;\ 0)$ – точки перетину з осями координат.

2. Асимптот не має.

3. Знайдемо особливі точки.

Знайдемо похідну даної функції:

$$\overline{r^{/}} = \{2t; 4t^3 + 5t^4\}.$$

Розв'яжемо – систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2t = 0; \\ 4t^3 + 5t^4 = 0; \end{cases} \begin{cases} t_1 = 0; \\ t^3(4 + 5t) = 0; \end{cases} \begin{cases} t_{1,2} = 0; \\ t_3 = -\dfrac{4}{5}. \end{cases}$$

Підставимо знайдені значення t в умову, отримаємо:

$$r(0) = \{0; 0\} \Rightarrow t = 0 \in \gamma,$$
$$t = -\tfrac{4}{5} \notin \gamma.$$

Отже, точка $t = 0$ – особлива. Знайдемо другу похідну.

$$\overline{r^{//}} = \{2; 12t^2 + 20t^3\}.$$

Підставимо значення особливої точки в знайдену похідну, отримаємо:

$$\bar{r}^{//} = \{2; 0\}.$$

Оскільки, перша координата не дорівнює 0, то $n = 2$. Знайдемо третю похідну і підставимо в неї значення особливої точки.

$$\vec{r}^{///} = \{0; 24t + 60t^2\}|_{t=0} = \{0; 0\}.$$

Оскільки, друга координата дорівнює 0, то знаходимо 4 похідну:

$$r^{IV} = \{0; 24 + 120t\}|_{t=0} = \{0; 24\}.$$

Маємо, що друга координата не дорівнює 0, то $m = 4$.

Отже, точка $O(0;0)$ – точка звороту другого роду.

4. Знайдемо точки перегину.

$$x^/ = 2t, \qquad y^/ = 4t^3 + 5t^4,$$

$$x^/ = 2t|_{t=0} = 0, \qquad y^/ = (4t^3 + 5t^4)|_{t=0} = 0,$$

$$x^{//} = t, \qquad y^{//} = 12t^2 + 20t^3,$$

$$x^{//} = t|_{t=0} = 0, \qquad y^{//} = (12t^2 + 20t^3)|_{t=0} = 0.$$

Знайдемо знак виразу: $x^/y^{//} - y^/x^{//}$=$0 - 0 = 0$.

Отже, точка O – точка перегину.

$x^/ = 2t|_{t=-1} = -2$, $x^{//} = t|_{t=-1} = -1,$

$y^/ = (4t^3 + 5t^4)|_{t=-1} = 1,$

$y^{//} = (12t^2 + 20t^3)|_{t=-1} = -8,16 + 1 = 17 > 0.$

То крива опукла вгору.

6. Крива має вигляд (рис.7.3).

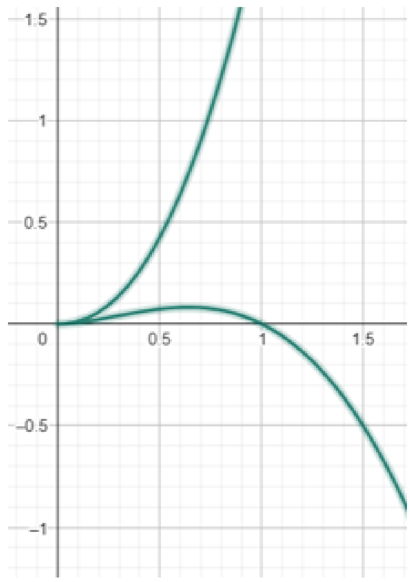


Рис.7.3.

г) $\boldsymbol{y = e^{-x^2}}$**.**

1. Знайдемо точки перетину з осями координат.

Вісь OX графік не перетинає, бо $e^{-x^2} \neq 0$.

Знайдемо точки перетину з віссю OY.

$$x = 0, y = e^0, y = 1.$$

Маємо $A(0;\, 1)$ – точка перетину з віссю OY.

2. Знайдемо асимптоти кривої.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x}, b = \lim_{x\to\infty}(y - kx).$$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} = 0, b = \lim_{x\to\infty} e^{-x^2} = 0.$$

Отже, $y = 0$ – горизонтальна асимптота.

3. Знайдемо точки перегину.

Для цього знайдемо другу похідну та прирівняємо її до нуля.

$$y' = -2xe^{-x^2};$$

$$y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2};$$

$$-2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 0;$$

$$2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0;$$

$$2e^{-x^2} = 0 - \text{не має розв'язків.}$$

$$2x^2 - 1 = 0;\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{e}}, y_2 = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

$M_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right), M_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ – точки перегину.

4. Знайдемо особливі точки.

Для цього запишемо криву у вигляді:

$y - e^{-x^2} = 0$. Знайдемо похідні:

$$F_x^/ = 2xe^{-x^2};$$

$$F_y^/ = 1.$$

Прирівняємо їх до нуля:

$\begin{cases} 1 = 0; \\ 2xe^{-x^2} = 0. \end{cases}$ Звідки бачимо, що система не має розв'язків, отже крива не має особливих точок.

5. Крива має вигляд (рис.7.4):

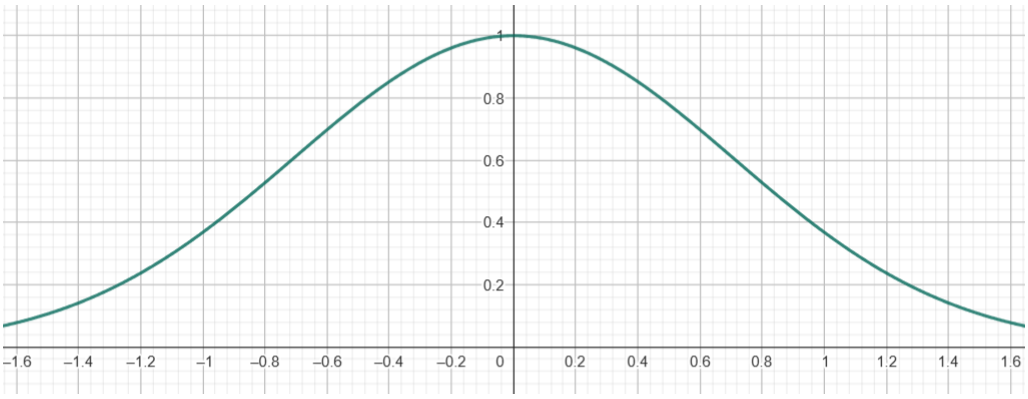


Рис.7.4

Завдання для аудиторної роботи

1. Дослідіть та побудуйте лінії, задані рівнянням у явному вигляді:

а) $y = \frac{x^2}{x^2-1}$, б) $y = e^{\frac{1}{x}}$.

2. Дослідіть та побудуйте образ кривих, заданих параметричним рівнянням.

а) $x = \frac{1}{t^2+1}, y = \frac{t^3}{1+t^2}$, б) $x = 4t^2, y = 3t(t^2+1)$.

3. Дослідіть та побудуйте образ кривих, заданих рівняннями:

а) $x^3 + y^2 - 2 = 0$, б) $x^2 = y^2 + x^4$.

Завдання для самостійної роботи

1. Побудувати криву, задану параметричним рівнянням: $x = \frac{1}{t^2+1}, y = \frac{t}{t^2+1}$.

2. Побудувати криву, задану явно:

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + x.$$

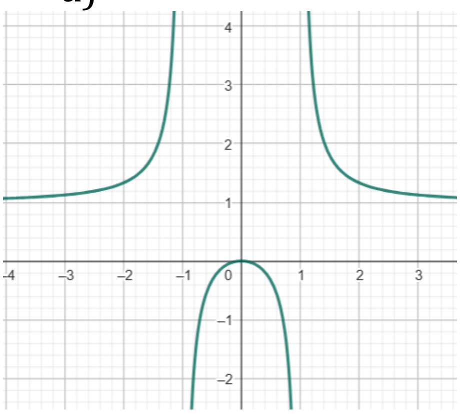
3. Побудувати криву, задану алгебраїчним рівнянням:

$$x^3 + y^3 - 3x - 3y + 1 = 0.$$

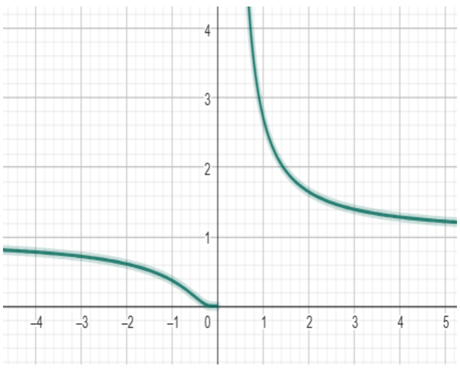
Відповіді

Завдання для аудиторної роботи

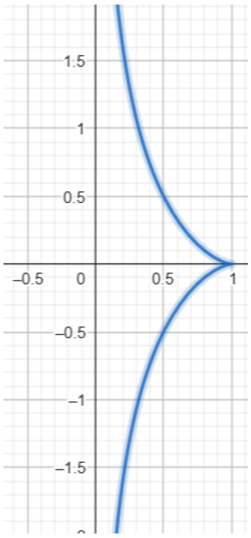
1. а)



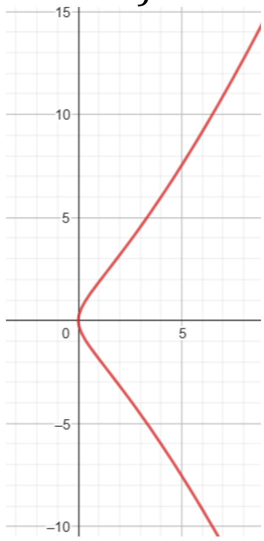
б)



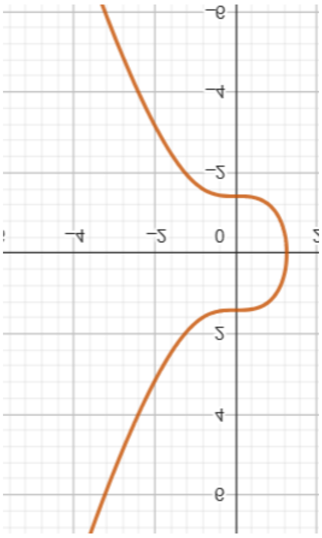
2. а)



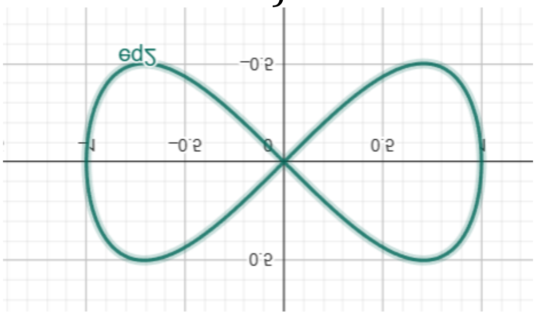
б)



3. а)

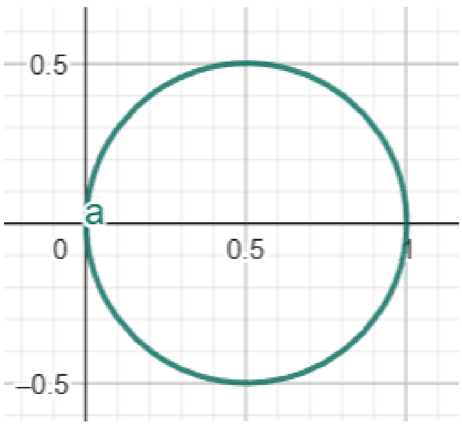


б)

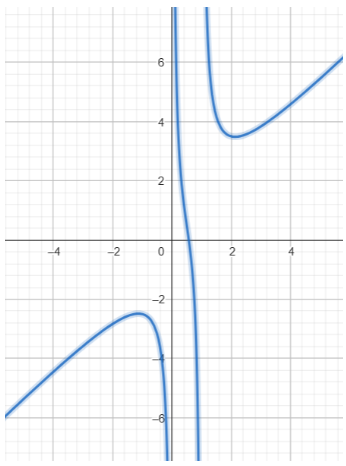


Завдання для самостійної роботи

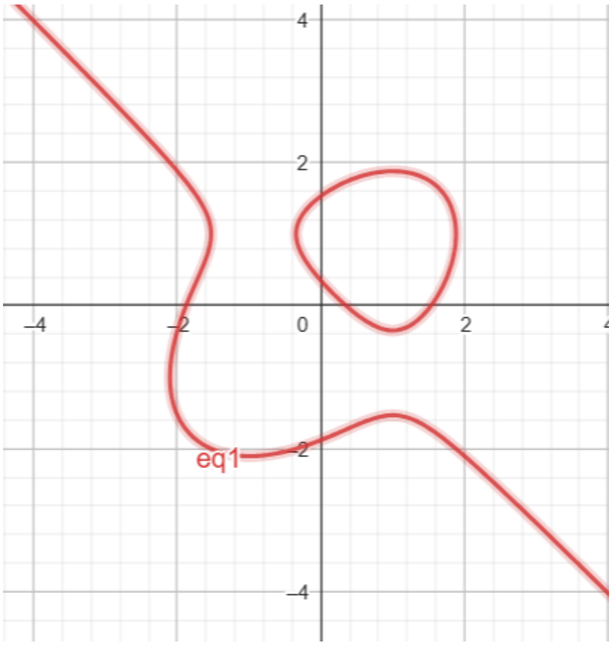
1.



2.



3.



РОЗДІЛ 2

ПОВЕРХНІ

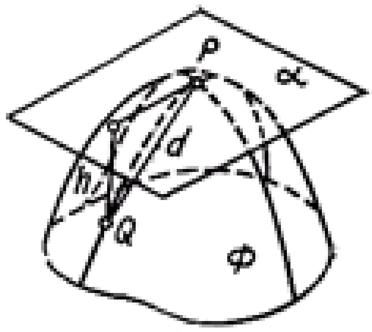
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 8
ПОВЕРХНІ В ЕВКЛІДОВОМУ ПРОСТОРІ. ДОТИЧНА І НОРМАЛЬ. ОБВІДНА СІМ'Ї. РЕБРО ЗВОРОТУ

1. Поняття поверхні
2. Способи задання поверхонь
3. Дотична площина і нормаль до гладкої поверхні
4. Обвідна сім'ї
5. Ребро звороту

Короткі теоретичні відомості

Простим куском поверхні називається множина точок, яка взаємнооднозначно і неперервно може бути відображена на множину внутрішніх точок круга. Простий кусок поверхні визначається за допомогою вектор-функції двох параметрів, наприклад, $\vec{r}(u, v)$, де u і v належать деякій області на площині. Для того, щоб кусок поверхні був «простим», він повинен бути регулярним, що гарантує існування дотичної площини у кожній точці	**Взаємно-однозначність:** кожна точка на поверхні відповідає точно одній точці в крузі, і навпаки. Це виключає можливість «злипання» або «розривів» у відображенні. **Неперервність:** близькі точки на поверхні відображаються в близькі точки в крузі. Це гарантує «гладкість» відображення. **Множина внутрішніх точок круга:** не враховуємо точки за межами круга

Множину *Ф* точок простору називають **елементарною поверхнею**, якщо вона є образом елементарної області на площині під час топологічного відображення її в простір	**Елементарна поверхня** – це частина простору, яку можна отримати, деформуючи плоский кусок площини без розривів і склеювань. Уявіть собі кусок тканини («елементарна область на площині»). Тепер уявіть, що ви цю тканину розтягуєте, згинаєте або скручуєте, але так, щоб вона не рвалася і не злипалася (маємо топологічне відображення). Те, що у вас вийде в результаті, і є елементарною поверхнею
Сфера є простою поверхнею. Локально, сфера складається з елементарних поверхонь	1) можна описати за допомогою параметричних рівнянь, використовуючи сферичні координати. Це означає, що кожна точка на сфері може бути однозначно визначена двома параметрами (наприклад, кутами); 2) є гладкою поверхнею, і в кожній її точці існує дотична площина. Отже, вона є регулярною; 3) не має «дірок» або «самоперетинів»

Поверхню Φ називатимемо **регулярною** (k раз диференційованою), якщо у кожної точки цієї поверхні є окіл, що допускає регулярну параметризацію, тобто завдання рівняннями в параметричній формі. При $k = 1$ поверхня називається гладкою	Поверхня називається **аналітичною**, якщо вона в достатньо малому околі кожної своєї точки допускає аналітичну параметризацію. Всі аналітичні поверхні є регулярними, але не всі регулярні поверхні є аналітичними
Регулярна поверхня: ➢ локально виглядає як площина ➢ для кожної точки на поверхні існує параметризація (тобто відображення з області на площині в простір), яка є диференційованою і має якобіан рангу 2 ➢ поверхня «гладка» і не має «гострих кутів» або «розривів» ➢ Приклади: сфера, еліпсоїд, параболоїд	**Аналітична поверхня:** ➢ локально описується аналітичними функціями (функції, які можуть бути представлені у вигляді степеневого ряду) ➢ є особливо «гладкими» і мають багато корисних властивостей ➢ будь-яка аналітична поверхня є регулярною, але не навпаки ➢ Приклади: площина, сфера, поверхня, задана поліноміальними рівняннями
Нехай Φ – поверхня, P – точка на ній і α – площина, що проходить через точку P. Візьмемо на поверхні точку Q і позначимо її відстані від точки P і площини α через d і h відповідно.	 Площина α є *дотичною*

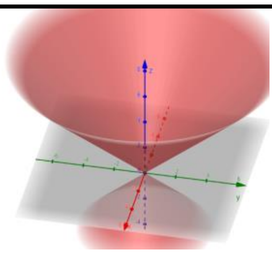
Вектори $\vec{r_u}, \vec{r_v}$ – координатні вектори. **Дотичною площиною** до регулярної поверхні в точці *P* називається площина, яка утворена дотичними до регулярних кривих, що лежать на поверхні і проходять через точку *P*	*площиною* поверхні в точці *P*, якщо відношення $h/d \to 0$, коли $Q \to P$ Якщо $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ яка-небудь гладка параметризація поверхні, то дотична площина в точці *P(u, v)* паралельна векторам $\vec{r_u}$ *(u, v)* і $\vec{r_v}$ *(u, v)*

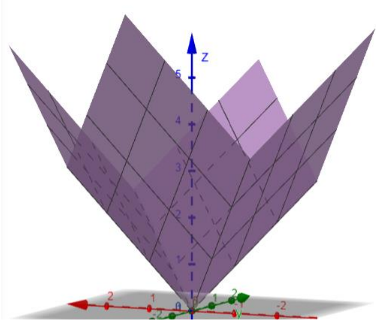
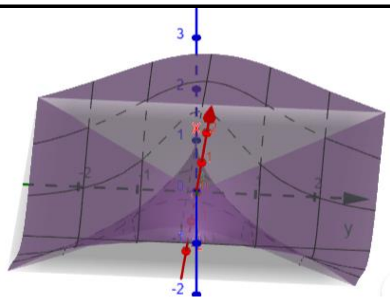
Нормаллю поверхні в точці *P* називається пряма, що проходить через точку *P* перпендикулярно до дотичної площини в цій точці

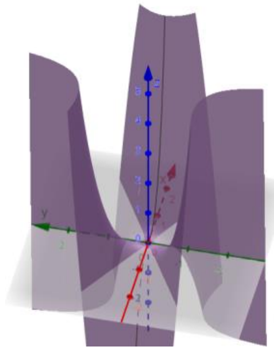
Способи задання поверхонь	
Параметрично	$\{x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)\}$
Векторно	$\vec{r} = \vec{r}(u,v)$
Неявно	$F(x,y,z) = 0$
Явно	*z=f(x, y)*
Рівняння дотичної площини поверхні	
$\{x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)\}$	$\begin{vmatrix} \tilde{x} - x(u;v) & \tilde{y} - y(u;v) & \tilde{z} - z(u;v) \\ x_u(u,v) & y_u(u;v) & z_u(u;v) \\ x_v(u,v) & y_v(u;v) & z_v(u;v) \end{vmatrix} = 0$
z = z(x, y)	$\begin{vmatrix} \tilde{x} - x & \tilde{y} - y & \tilde{z} - z \\ 1 & 0 & z'_x(x;y) \\ 0 & 1 & z'_y(x;y) \end{vmatrix} = 0$
$F(x,y,z) = 0$	$(\tilde{x} - x)F'_x + (\tilde{y} - y)F'_y + +(\tilde{z} - z)F'_z = 0$
Рівняння нормалі	
Параметрично	$\dfrac{x - x_0}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}} = \dfrac{y - y_0}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}} = \dfrac{z - z_0}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}$
Неявно	$\dfrac{x - x_0}{F'_x(P)} = \dfrac{y - y_0}{F'_y(P)} = \dfrac{z - z_0}{F'_z(P)}$

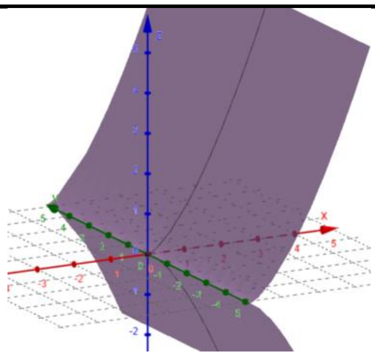
Явно	$$\frac{x-x_0}{-\frac{\partial z}{\partial x}}=\frac{y-y_0}{-\frac{\partial z}{\partial y}}=\frac{z-z_0}{1}$$
Особлива точка поверхні – це точка, в якій поверхня не є гладкою, або її поведінка відрізняється від «нормальної». Це точки, де порушується регулярність поверхні, тобто похідні векторної параметризації стають лінійно залежними. Особлива точка – це точка на поверхні, де неможливо визначити дотичну площину	Точку P регулярної поверхні називатимемо **звичайною точкою** по відношенню до даного ступеня регулярності k, якщо поверхня допускає k раз диференційовну параметризацію $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, в околі цієї точки, що задовольняє умову: ранг матриці $\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$ в точці P дорівнює 2. Інакше точка P називається **особливою**. Лінія на поверхні, всі точки якої є особливими точками, називається **особливою лінією**
Точка Q поверхні буде точно особливою, якщо при $P \to Q$ $$\mu_P=\frac{[\vec{r}_u\times\vec{r}_v]}{\lvert[\vec{r}_u\times\vec{r}_v]\rvert}$$ ***не має** скінченної границі*	Особливими точками поверхні $F(x, y, z) = 0$ можуть бути тільки ті її точки, де: $$F'_x=F'_y=F'_z=0$$

<table>
<tr><th colspan="2">Типи особливих точок поверхні</th></tr>
<tr><td>Конічні точки – поверхня має форму конуса

Наприклад: $z = x^2 + y^2$</td><td>
(0;0;0)</td></tr>
<tr><td>Ребра – дві гладкі частини поверхні зустрічаються під кутом

Наприклад: $z = |x| + |y|$</td><td></td></tr>
<tr><td>Точки самоперетину – поверхня перетинає сама себе
Наприклад: $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$</td><td>
(0;0;0)</td></tr>
<tr><td>Куспи – точки, де поверхня набуває форми вістря

Наприклад:
$x = u, y = v, z = u^3 - 3uv^2$</td><td>
(0;0;0)</td></tr>
<tr><td>Ребро звороту

Наприклад:
$x = u^2, y = v, z = u^3$
для знаходження потрібно розв’язати систему:</td><td></td></tr>
</table>

$\begin{cases} F(x,y,z,c) = 0 \\ F'_c(x,y,z,c) = 0 \\ F''_{cc}(x,y,z,c) = 0 \end{cases}$	
Обвідна сім'ї поверхонь – це поверхня, яка дотикається до кожної поверхні з даної сім'ї	Нехай задано однопараметрична сім'я гладких поверхонь $S\{F_c\}$: $F(x, y, z, c) = 0$, $a < c < b$, де F – неперервно диференційовна по всіх аргументах функція, задовольняє умові $F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2 \neq 0$. Тоді, якщо гладка поверхня Φ є обвідною цієї сім'ї, то вона задається рівняннями $\begin{cases} F(x,y,z,c) = 0; \\ F'_c(x,y,z,c) = 0. \end{cases}$

Типові завдання

№1. Визначити вектор нормалі сфери.

Розв'язання:

Сферу можна задати параметричним рівнянням:

$$\vec{r}\,(u,v) = \{a \sin v \cos u\,, a \sin v \sin u\,, a \cos v\}.$$

Тоді вектор нормалі сфери:

$$[\vec{r_u} \times \vec{r_v}] = -a \sin v\,(a \sin v \cos u\,, a \sin v \sin u\,, a \cos v) = -a \sin v \cdot \vec{r}\,(u,v)$$

колінеарний до радіуса-вектора цієї ж сфери.

№2. Написати рівняння дотичної та нормалі до поверхні $\bar{r} = \{u+v, u-v, uv\}, u = 2, v = 1$.

Розв'язання:

$$x = u + v,$$

$$y = u - v,$$
$$z = uv.$$
$$M: u = 2, v = 1.$$

Знайдемо частинні похідні.

$$x_u^{/} = 1, x_v^{/} = 1,$$
$$y_u^{/} = 1, y_v^{/} = -1,$$
$$z_u^{/} = v, z^{/}{}_v = u.$$

Підставляючи в умову задані значення u і v, отримаємо $x = 3$, $y = 1$, $z = 2$.

Складемо рівняння дотичної площини, користуючись формулою:

$$\begin{vmatrix} \tilde{x} - x(u;v) & \tilde{y} - y(u;v) & \tilde{z} - z(u;v) \\ x'_u(u,v) & y'_u(u;v) & z'_u(u;v) \\ x'_v(u,v) & y'_v(u;v) & z'_v(u;v) \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-2 \\ 1 & 1 & v \\ 1 & -1 & u \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-3)(u+v) - (y-1)(u-v) + (z-2)(-2) = 0,$$
$$(x-3)\cdot 3 - (y-1)\cdot 1 + (z-2)(-2) = 0,$$
$$3x - 9 - y + 1 - 2z + 4 = 0,$$
$$3x - y - 2z - 4 = 0.$$

$3x - y - 2z - 4=0$ – рівняння дотичної площини.

Складемо рівняння нормалі.

$\vec{n} = (3; -1; -2), \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-2}.$

Відповідь: $\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-2}.$

№3. Напишіть неявне рівняння циліндричної поверхні з направляючою лінією $\boldsymbol{x = \cos u, y = \sin u, z = 0}$ і прямолінійними твірними, паралельними вектору $\boldsymbol{\vec{a} = (-1; 3; -2)}$.

Розв'язання:

$$x = \cos u - v, y = \sin u + 3v, z = -2v.$$

$$v = -\frac{z}{2},$$

$$x = \cos u + \frac{z}{2}, y = \sin u - \frac{3z}{2}.$$

$$\cos u = x - \frac{z}{2}, \sin u = y + \frac{3z}{2},$$

$$\cos^2 u = \left(x - \frac{z}{2}\right)^2,$$

$$\sin^2 u = \left(y + \frac{3z}{2}\right)^2.$$

$\left(x - \frac{z}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3z}{2}\right)^2 = 1$ – неявне рівняння заданої циліндричної поверхні (рис.8.1).

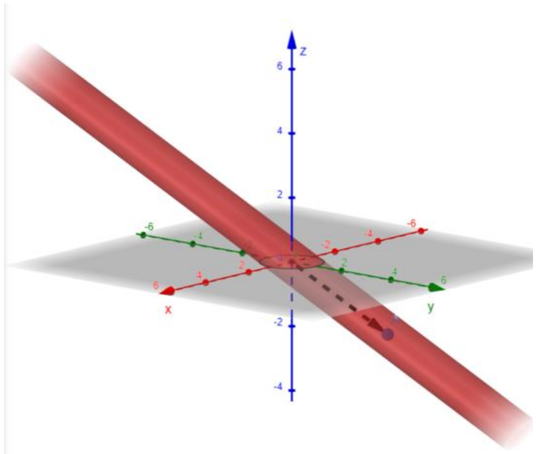


Рис.8.1.

Відповідь: $\left(x - \frac{z}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3z}{2}\right)^2 = 1.$

№4. Знайдіть обвідну сім'ї поверхонь

$$\boldsymbol{x + C^2 y + z - 2C = 0}.$$

Розв'язання:

Знайдемо похідну по змінній C і прирівняємо її до 0.

$$2Cy - 2 = 0, 2Cy = 2, C = \frac{1}{y}.$$

Підставимо знайдене значення в початкову умову.

$x+\frac{1}{y}+z-\frac{2}{y}=0, xy+yz=1$– гіперболічний циліндр.

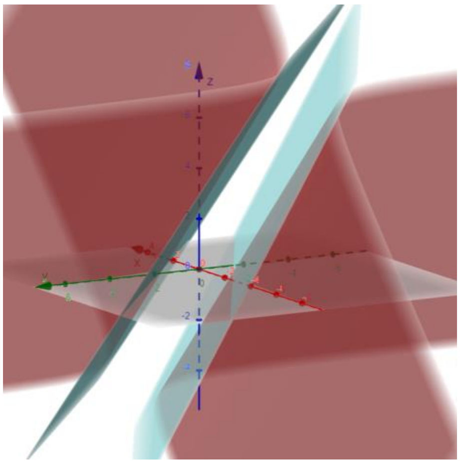


Рис.8.2.

Відповідь: $xy+yz=1$ – гіперболічний циліндр.

Завдання для аудиторної роботи

1. У площині xOz задана лінія $x=f(u), z=g(u)$, яка не перетинає вісь Oz. Знайдіть параметризацію поверхні, яка отримана при обертанні цієї лінії навколо осі Oz.

2. Напишіть рівняння тора, який отримується при обертанні кола $x=a+b\cos u, y=0, z=b\sin u, (b<a)$ навколо осі Oz.

3. Напишіть параметричне рівняння циліндричної поверхні, твірні якої паралельні вектору $\vec{a}=(1;2;3)$, а напрямна задана рівняннями $x=u, y=u^2, z=u^3$.

4. Дана поверхня $x=3u+v^2+1, y=2u+v^2-1$,

$$z=-u+2v.$$

1) Покажіть, що ця поверхня циліндрична.

2) Напишіть рівняння будь-якої її направляючої лінії.

3) Знайдіть прямолінійну твірну, яка проходить через точку $M(u=2, v=3)$.

5. На поверхні $x = u + \cos v$, $y = u - \sin v$, $z = \lambda u$ дана точка $M\left(u = 1, v = \frac{\pi}{2}\right)$.

1) Напишіть рівняння дотичної площини і нормалі до ліній $u = 1, v = \frac{\pi}{2}$ в точці M.

2) Знайдіть кут між лініями $u = 1, v = \frac{\pi}{2}$.

3) Покажіть, що дотична в точці M до лінії $u = \sin v$ є дотичною до лінії $u=1$ в тій же точці.

6. Напишіть рівняння дотичної площини до поверхні $x = 2u - v, y = u^2 + v^2, z = u^3 - v^3$ в точці $M(3; 5; 7)$.

7. Напишіть рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $x = u + v, y = u - v, z = uv$ в точці $M(u=2, v=1)$.

8. Напишіть рівняння дотичної площини і нормалі до наступних поверхонь у вказаних точках:

а) $z = x^3 + y^3$ в точці $M(1;2;9)$.

б) $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ в точці $M(3; 4; 12)$.

9. Знайдіть порядок дотику лінії $x = t^3, y = t^3 + 2t$, $z = t^2$ з поверхнею $x^2 + y^2 = x(y + z)$ (рис.8.3).

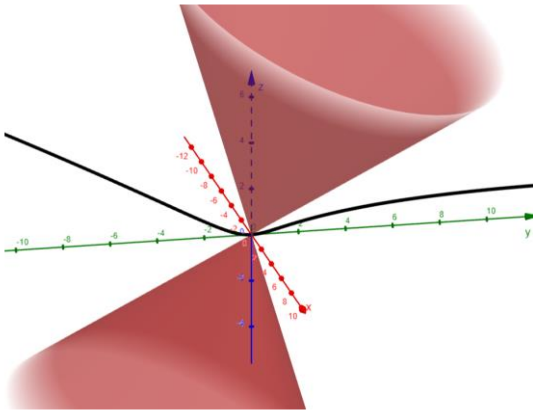


Рис.8.3.

10. Знайдіть обвідну сім'ї поверхонь:

1) $x^2 + y^2 + (z - C)^2 - C^2 = 0, C \neq 0$;

2) $(x - C)^2 + (y - C)^2 + (z - C)^2 - C^2 = 0, C \neq 0$.

11. Знайдіть обвідну і характеристики сім'ї сфер $(x - \mathrm{C})^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Чи існує ребро звороту обвідної?

12. Знайдіть ребро звороту обвідної сім'ї площин $x \sin\alpha - y \cos\alpha + z = b\alpha$, де b – const, α – параметр.

Завдання для самостійної роботи

1. Доведіть, що крива $\vec{r} = \left\{ e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \cos t \,, e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \sin t \,, e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \right\}$ лежить на конусі $x^2 + y^2 = z^2$. Під яким кутом вона перетинає його твірні?

2. Яка поверхня задається рівняння $\vec{r} = \{a \cos u \cos v \,, a \cos u \sin v \,, a \sin u\}$. Чи правильна на ній сітка координатних ліній?

3. Складіть параметричне рівняння циліндра з напрямною $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$ і твірними паралельними осі Oz.

4. Напишіть рівняння конуса з вершиною в точці $P(4;-1;3)$, твірні якого дотикаються еліпсоїда $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1$.

5. Складіть рівняння дотичної площини поверхні $xy^2 + z^2 = 8$ в точці (1;2;2). Визначить орт нормалі в цій точці.

6. Знайдіть обвідну сім'ї сфер $x^2 + y^2 + (z - C)^2 = 1$.

7. Знайдіть обвідну і характеристики сім'ї кругових циліндрів постійного радіуса r:

1) $(x-C)^2+y^2=r^2$;

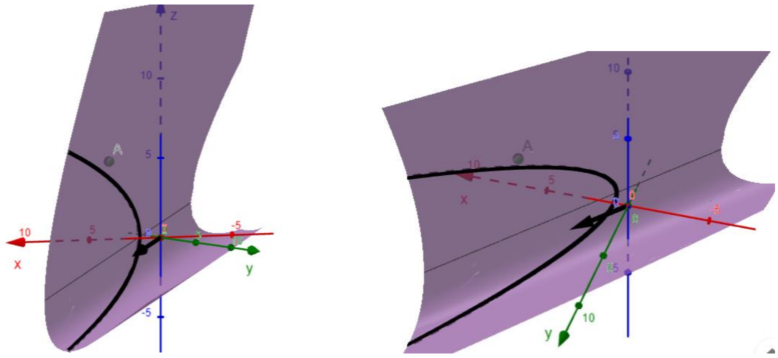
2) $x^2+(y-C)^2=r^2$;

3) $(x-C)^2+(y-C)^2=r^2$.

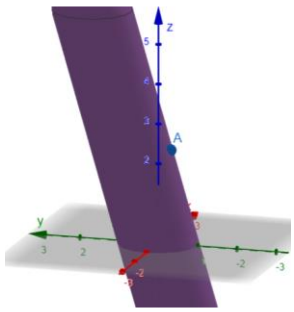
Відповіді

Завдання для аудиторної роботи

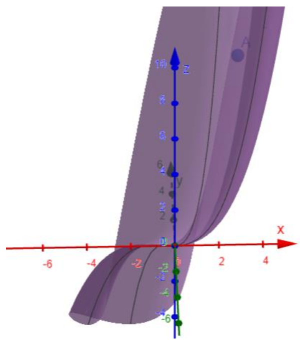
1. $x=f(u)\cos v$, $y=f(u)\sin v$. 3. $x=u+v$, $y=u^2+2v$, $z=u^3+3v$. 4. 1)



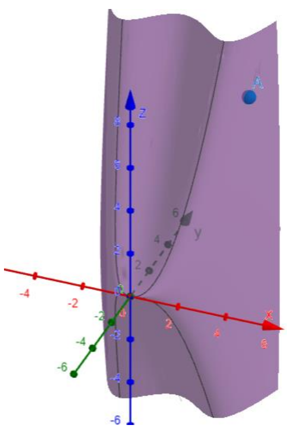
2) напрямна – парабола $x = v^2 + 1$, $y = v^2 - 1$, $z = 2v$, 3) твірні паралельні вектору $\vec{a}=(3;2;-1)$, $M(16;\ 12;\ 4)$, $\frac{x-16}{3}=\frac{y-12}{2}=\frac{z-4}{-1}$.



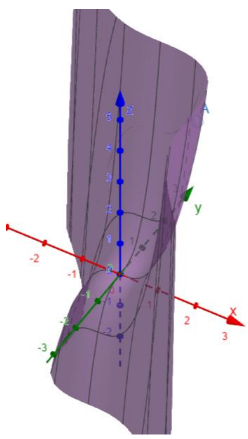
5.



6.



7.

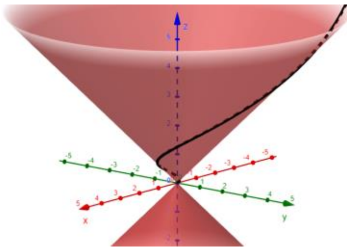


8. а)

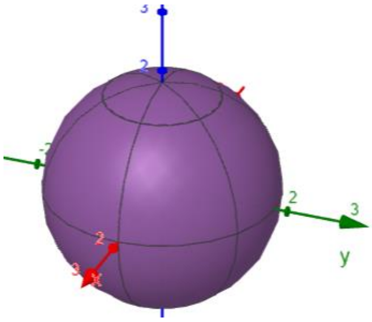
Завдання для самостійної роботи

1.

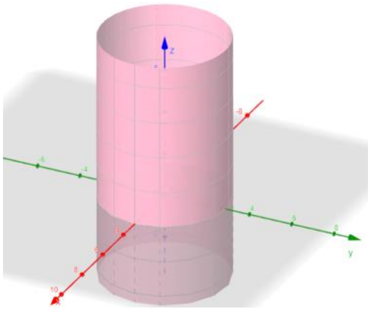
Твірна $(x-1)/2=y/0=(z-1)/2$, кут 45^0



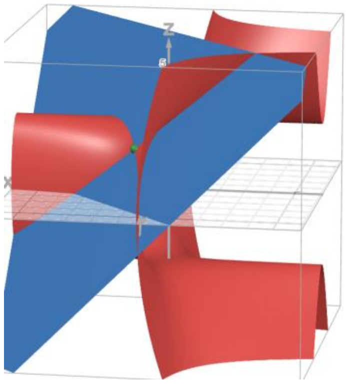
2.



3. $x=a\cos u,\ y=a\sin u, z=v$

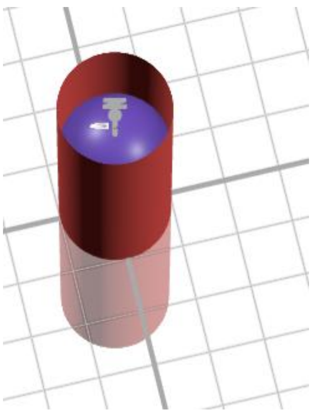


5. $x + y + z - 5=0$

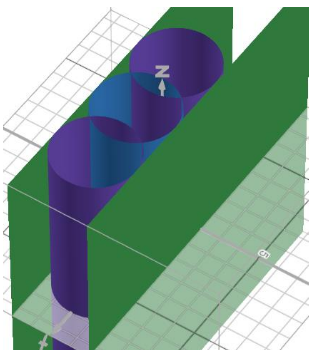


6. Обвідні – циліндри,

$x^2 + y^2 = 1,\ z = 0.$



7. а) $y = r, y = -r$



б) $x = r, x = -r$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 9
ПЕРША КВАДРАТИЧНА ФОРМА ПОВЕРХНІ ТА ЇЇ ВИКОРИСТАННЯ

1. *Обчислення І квадратичної форми*
2. *Обчислення довжин дуг*
3. *Обчислення кутів*
4. *Обчислення площ*

Короткі теоретичні відомості

Перша квадратична форма описує внутрішню геометрію поверхні	І = $ds^2 > 0$
Коефіцієнти першої квадратичної форми	$\vec{r}_u^{\,2} = E, (\vec{r}_u \vec{r}_v) = F,$ $\vec{r}_v^{\,2} = G$
$I = ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$	
Обчислення довжини дуги кривої на поверхні	$s(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} \left\vert \vec{r}'(t) \right\vert dt$ $= \int_{t_0}^{t} \left\vert \vec{r}'(u(t), v(t) \right\vert dt =$ $= \int_{\gamma\left(P_{,0},P\right)} \left\vert d\,\vec{r}\,(u,v) \right\vert =$ $= \int_{\gamma(P_0,P)} \sqrt{I}\,dt$
Кут між кривими на поверхні	$cos\,\phi = \frac{I(d,\delta)}{\sqrt{I(d)I(\delta)}}$
Кут між координатними лініями	$cos\,\phi = \frac{F}{\sqrt{EG}}$
Площа куска поверхні	$\sigma = \iint \sqrt{EG - F^2}\,dudv$

Поверхні називаються **ізометричними**, якщо існує взаємно однозначне відображення поверхні Φ_1 на поверхню Φ_2, при якому відповідні криві на цих поверхнях мають однакові довжини	Якщо регулярні поверхні Φ_1 і Φ_2 можна параметризувати так, що їх перші квадратичні форми будуть однакові, то поверхні ізометричні. Ізометричне відображення полягає в зіставленні точок з однаковими координатами
Згинанням поверхні називається така неперервна її деформація, при якій довжини кривих на поверхні не змінюються	За відповідної параметризації перша квадратична форма під час згинання поверхні не змінюється
Топологічне відображення регулярної поверхні Φ_1 на регулярну поверхню Φ_2 називається **конформним**, якщо воно зберігає кути між кривими в тому значенні, що відповідні криві на цих поверхнях перетинаються під однаковими кутами	Якщо регулярні поверхні Φ_1 і Φ_2 параметризуються так, що коефіцієнти їх перших квадратичних форм пропорційні, то відображення однієї поверхні на іншу, при якому зіставляються точки з однаковими координатами, конформний

Типові завдання

№1. Знайти першу квадратичну форму поверхні

$$\bar{r} = \{au \cos v\,; bu \sin v\,; cu\}.$$

Розв'язання:

$$\bar{r}_u^{/} = \{a \cos v\,; b \sin v\,; c\};$$

$$\bar{r}_v^{/} = \{-au \sin v\,; bu \cos v\,; 0\};$$

$$\left(\bar{r}_u^{/}\right)^2 = \{a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v + c^2\};$$

$$\left(\bar{r}_v^{/}\right)^2 = \{a^2u^2 \sin^2 v + b^2u^2 \cos^2 v\};$$

$$\left(\bar{r}_u^{/}\bar{r}_v^{/}\right) = \{-a^2u \sin v \cos v + b^2u \cos v \sin v\} =$$

$$= \left\{-\frac{1}{2}a^2 \sin 2v + \frac{1}{2}b^2 \sin 2v\right\} =$$

$$= \left\{\frac{1}{2}\sin 2v(-a^2 + b^2)\right\};$$

$$I = (a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v + c^2)du^2 + \sin 2v(-a^2 + b^2)dudv + (a^2u^2 \sin^2 v + b^2u^2 \cos^2 v)dv^2.$$

Відповідь: $I = (a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v + c^2)du^2 +$
$+\sin 2v(-a^2 + b^2)dudv + (a^2u^2 \sin^2 v + b^2u^2 \cos^2 v)dv^2.$

№2. Дано поверхню $\{\boldsymbol{x = u^2 + v^2, y = u^2 - v^2, z = uv}\}$. Обчислити довжину дуги кривої *v=ua* на даній поверхні між точками її перетину з лініями *u*=1, *u*=2.

Розв'язання:

Оскільки в даному випадку параметром є змінна u, то довжина дуги обчислюється з формулою:

$s = \int_{u_1}^{u_2}\sqrt{E + 2F\frac{dv}{du} + G\left(\frac{dv}{du}\right)^2}\,du$, u_1=1, u_2=2.

$E = (8 + a^2)u^2, F = au^2, G = (8a^2 + 1)u^2, \frac{dv}{du} = a.$

Отже:

$$s = \int_1^2 \sqrt{(8 + a^2)u^2 + 2a^2u^2 + (8a^2 + 1)u^2a^2}du =$$

$$= \int_1^2 \sqrt{8u^2 + a^2u^2 + 2a^2u^2 + 8a^4u^2 + a^2u^2}du =$$

$$= \int_1^2 2u\sqrt{2 + a^2 + 2a^4}\,du = u^2\sqrt{2 + a^2 + 2a^4}\Big|_1^2 =$$

$$= 3\sqrt{2a^4 + a^2 + 2}.$$

Відповідь: $s = 3\sqrt{2a^4 + a^2 + 2}$.

№3. Знайти площу криволінійного трикутника $\boldsymbol{0 \le u \le shv, 0 \le v \le v_0}$ на гелікоїді $\{\boldsymbol{x = u\sin v, y = u\cos v, z = v}\}$.

Розв'язання:

Площа куска поверхні обчислюється за формулою

$\sigma = \iint \sqrt{EG - F^2}\, dudv$.

Область – заданий трикутник.

$E = 1$, $F = 0$, $G = 1 + u^2$.

$$\sigma = \int_0^{v_0} dv \int_0^{shv} \sqrt{1 + u^2} du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{v_0} dv \left[u\sqrt{1 + u^2} + \ ln\left(u + \sqrt{1 + u^2}\right)\right]\Big|_0^{shv} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{v_0} (shvchv + v)\, dv = \frac{1}{4}(v_0^2 + sh^2 v_0).$$

Відповідь: $\sigma = \frac{1}{4}(v_0^2 + sh^2 v_0)$.

№4. Вкажіть, чи може задана квадратична форма слугувати першою квадратичною формою деякої поверхні:

а) $ds^2 = du^2 + 4dudv + dv^2$;

б) $ds^2 = du^2 - 4dudv + 6dv^2$.

Розв'язання:

а) $\boldsymbol{ds^2 = du^2 + 4dudv + dv^2}$.

Оскільки перша квадратична завжди додатня і не дорівнює нулю, то перевіримо умову $EG - F^2 > 0$.

Знайдемо коефіцієнти E, G, F.

$$E = 1, F = 2, G = 1;$$

$$1 - 2 = -1 < 0.$$

Оскільки, умова $EG - F^2 > 0$ порушується, то задана квадратична форма не може слугувати першою квадратичною формою деякої поверхні.

Відповідь: ні.

б) $\boldsymbol{ds^2 = du^2 - 4dudv + 6dv^2}$.

Знайдемо коефіцієнти E, G, F.

$$E = 1, F = -2, G = 6;$$

$$6 - 4 = 2 > 0.$$

Оскільки, умова $EG - F^2 > 0$ виконується, то задана квадратична форма може слугувати першою квадратичною формою деякої поверхні.

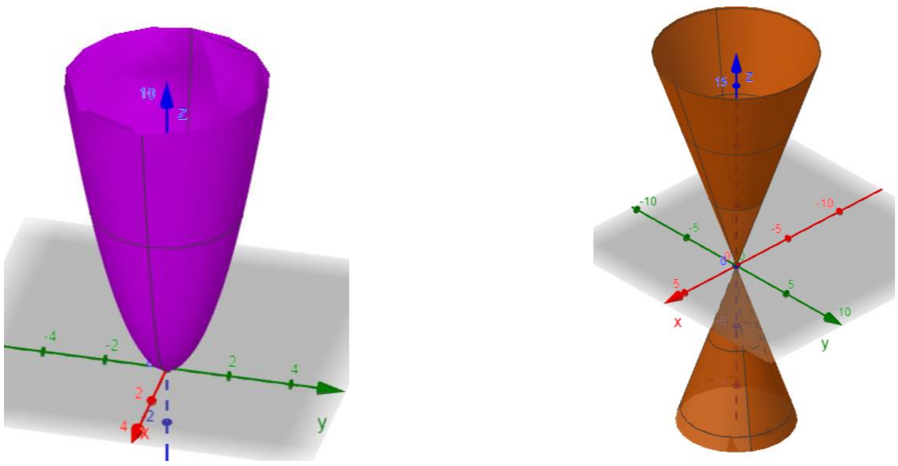
Відповідь: так.

Завдання для аудиторної роботи

1. Знайти першу квадратичну форму поверхні:

а)$x = u\cos v\,, y = u\sin v\,, z = u^2$;

б) $x = u\cos v\,, y = u\sin v\,, z = ku$.



а) б)

Рис.9.1.

2. Вкажіть, чи може задана квадратична форма слугувати першою квадратичною формою деякої поверхні: $ds^2 = du^2 + 2dudv + dv^2$?

3. Задана поверхня $x = u^2 + v^2, y = u^2 - v^2, z = uv$.

   а) Знайдіть першу квадратичну форму.

   б) Обчисліть диференціал довжини дуги для лінії $u = 2$; $v = 1$; $v = au$.

   в) Обчисліть довжину дуги лінії $v = au$ між точками її перетину з лініями $u = 2$, $v = 1$.

4. Знайдіть під яким кутом перетинаються лінії $u + v = 0$, $u - v = 0$, на прямому гелікоїді $x = u \cos v, y = u \sin v, z = av$ (рис.9.2).

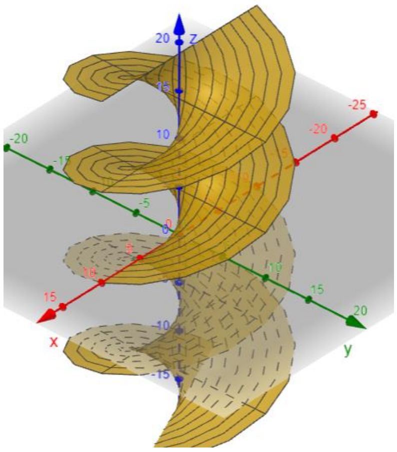


Рис.9.2.

5. Знайдіть кут між лініями $v = 2u$, $v = -2u$ на поверхні, що має першу квадратичну форму $ds^2 = du^2 + dv^2$.

6. Знайдіть кут між лініями $v = u + 1$ і $v = 3 - u$ на поверхні $x = u \cos v, y = u \sin v, z = u^2$.

7. Знайдіть площу чотирикутника на прямому гелікоїді $x = u \cos v, y = u \sin v, z = av$, обмеженого лініями $u = 0$, $u = a$, $v = 0$, $v = 1$.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайдіть кут, утворений віссю Oz з дотичними до лінії

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), z = 4a \sin\frac{t}{2}, t = \frac{\pi}{2}.$$

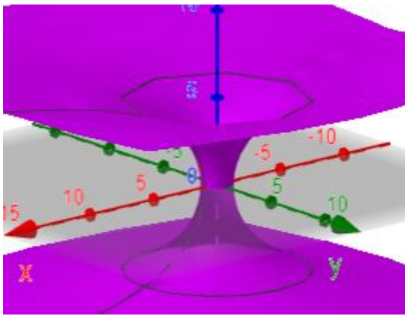
2. Знайдіть перші квадратичні форми поверхонь:

а) $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$; б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

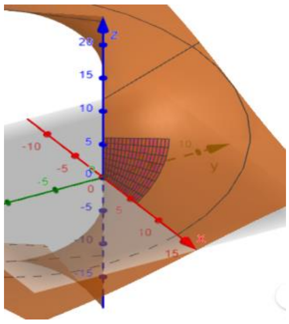
3. На поверхні з першою квадратичною формою $ds^2 = du^2 + \frac{1}{4}sh^2 u dv^2$ знайдіть довжину дуги кривої $2u = v$ між точками $P_1(u_1; v_1), P_2(u_2; v_2)$.

4. На поверхні з першою квадратичною формою $ds^2 = du^2 + (1 + u^2)dv^2$ знайдіть кут між двома лініями $3u=v$ і $v=-u$.

5. На катеноїді $x = chu \cdot \cos v, y = chu \cdot \sin v, z = u$ (рис.9.3. а) знайдіть кут між лініями $u + v = 0$ і $u - v = 0$ у їх спільній точці.



а)



б)

Рис.9.3.

6. Обчисліть площу чотирикутника, який лежить на гелікоїді $\vec{r} = \{au \cdot \cos v, au \cdot \sin v, hv\}$ (рис.9.3. б) і обмеженого кривими $u = 0, u = \frac{h}{a}, v = 0, v = 1$.

Відповіді

Завдання для аудиторної роботи

1. б) $ds^2 = du^2 + (u^2 + k^2)dv^2$. *2.* ні. *3.* а) $ds^2 = (8u^2 + v^2)du^2 + 2uvdudv + (8v^2 + u^2)dv^2$; б) u = 2 $ds = \sqrt{8v^2 + 4}dv$; v = 1 $ds = \sqrt{8u^2 + 1}du$; v = au $ds = 2u\sqrt{2a^4 + a^2 + 2}du$. *4.* $\cos\varphi = \pm\frac{1-a^2}{1+a^2}$. *5.* $\cos\varphi = -\frac{3}{5}$. *6.* $\cos\varphi = \frac{2}{3}$. *7.* $\sigma = \frac{a^2}{2}(\sqrt{2} + ln(1 + \sqrt{2}))$.

Завдання для самостійної роботи

1. 45^0. *2.* а) $I = r^2du^2 + r^2cos^2udv^2$. *3.* $shu_2 - shu_1$. *4.* $arccos(-\frac{1}{\sqrt{5}})$. *5.* $E = sh^2u + 1$, $F = 0$, $G = ch^2u$, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 10
ДРУГА КВАДРАТИЧНА ФОРМА ПОВЕРХНІ ТА ЇЇ ВИКОРИСТАННЯ

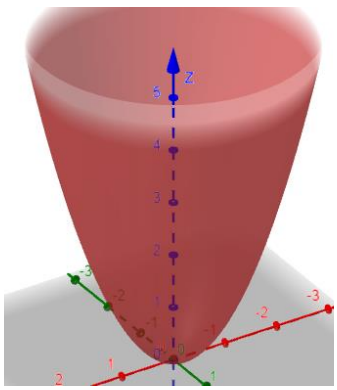
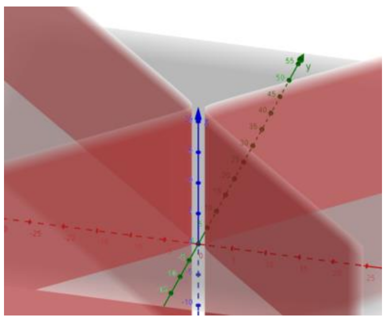
1. Означення другої квадратичної форми
2. Застосування II квадратичної форми
3. Кривина кривої на поверхні
4. Головні кривини
5. Повна та середня кривина

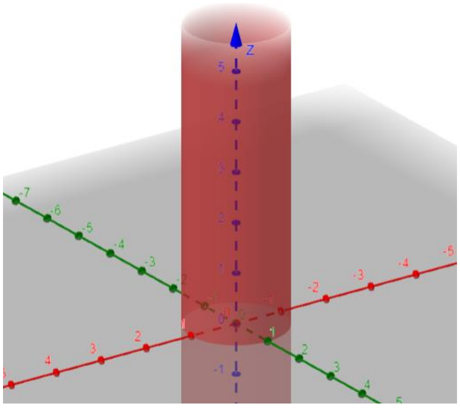
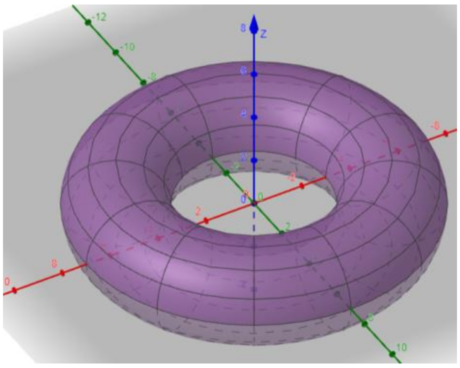
Короткі теоретичні відомості

Друга квадратична форма характеризує зовнішню геометрію поверхні, тобто її вигин у просторі	II = $-d\vec{r} \cdot d\vec{n}$ $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ – яка-небудь регулярна параметризація, $\vec{n} = \vec{n}(u, v)$ – одиничний вектор нормалі.

	Геометрично визначає половину відстані від точки поверхні до дотичної площини
$$-d\vec{r}\cdot d\vec{n}=\left(-\overrightarrow{r'_u n'_u}\right)du^2+\left(-\overrightarrow{r'_u n'_v}-\overrightarrow{r'_v n'_u}\right)dudv+$$ $$+(-\overrightarrow{r'_v n'_v})dv^2$$	
$$L=\frac{\left(\overrightarrow{r''_{uu} r'_u r'_v}\right)}{\left\|\overrightarrow{r'_u}\times\overrightarrow{r'_v}\right\|}=\frac{\begin{vmatrix} x''_{uu} & y''_{uu} & z''_{uu} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}$$	
$$M=\frac{\left(\overrightarrow{r''_{uv} r'_u r'_v}\right)}{\left\|\overrightarrow{r'_u}\times\overrightarrow{r'_v}\right\|}=\frac{\begin{vmatrix} x''_{uv} & y''_{uv} & z''_{uv} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}$$	
$$N=\frac{\left(\overrightarrow{r''_{vv} r'_u r'_v}\right)}{\left\|\overrightarrow{r'_u}\times\overrightarrow{r'_v}\right\|}=\frac{\begin{vmatrix} x''_{vv} & y''_{vv} & z''_{vv} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}$$	
z=$z(x;y)$: $L=\frac{z''_{xx}}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}$	
$$M=\frac{z''_{xy}}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}$$	
$$N=\frac{z''_{yy}}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}$$	
Головні напрямки – це напрямки на дотичній площині до поверхні в даній	Існує два головних напрямки (якщо вони різні) і дві головні кривини в кожній точці поверхні.

точці, в яких нормальна кривина поверхні досягає своїх екстремальних значень (максимуму та мінімуму)	Головні напрямки в кожній точці поверхні є ортогональними (перпендикулярними) один до одного
Нормальна кривина – це кривина кривої, яка утворюється при перетині поверхні площиною, що містить нормаль до поверхні в даній точці. Нормальна кривина залежить від напрямку, в якому ми перетинаємо поверхню	Це міра того, наскільки поверхня вигинається в напрямку, перпендикулярному до її дотичної площини. Серед усіх нормальних кривин виділяють дві головні кривини – максимальну та мінімальну. Нормальна кривина відображає, наскільки швидко поверхня відхиляється від своєї дотичної площини $k_n = \dfrac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$
Необхідна і достатня умова для того, щоб напрямок *(du : dv)* був головним напрямком	$\begin{vmatrix} Edu + FdvFdu + Gdv \\ Ldu + MdvMdu + Ndv \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} dv^2 - dudv & du^2 \\ E \quad F & G \\ L \quad M & N \end{vmatrix} = 0$
Лінія кривини – це крива на поверхні, дотичний вектор якої в кожній точці співпадає з одним із головних напрямків	Крива, яка в кожній своїй точці спрямована вздовж одного з головних напрямків поверхні – лінія кривини. Лінії кривини, що відповідають різним головним кривинам, є ортогональними одна до одної. Лінії кривини відображають напрямки, в яких

	поверхня має максимальну та мінімальну кривину
Головні кривини k_1 і k_2 є коренями квадратного рівняння і є екстремальними значеннями нормальної кривини поверхні в даній точці	$k^2(EG-F^2)-$ $-k(LG-2MF+NE)+$ $+(LN-M)^2=0$
Гаусова (повна) кривина – це добуток головних кривин поверхні в даній точці: $K=k_1*k_2$	Відображає, наскільки поверхня вигинається в околі даної точки $$K=k_1k_2=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$$
Знак гаусової кривини визначається виразом LN-M^2.	
$K>0$	еліптичні точки 
$K<0$	гіперболічні точки 

$K = 0$	параболічні точки 
Тор – це поверхня, утворена обертанням кола навколо осі, що лежить в площині кола, але не перетинає його. Тор має області з різними типами точок. Зовнішня частина тора має еліптичні точки. Внутрішня частина – гіперболічні точки. Існують також параболічні точки, існують і точки сплощення	
Середнє арифметичне головних кривин поверхні називається **середньою кривиною** поверхні	$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2}\frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2}$

Типові завдання

№1. Знайти другу квадратичну форму поверхні:

$$\bar{\boldsymbol{r}} = \{\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{cos}\,\boldsymbol{u}\,; \boldsymbol{v}\,\boldsymbol{sin}\,\boldsymbol{u}\,; \boldsymbol{ku}\}.$$

Розв'язання:

$$\bar{r}_u^{/} = \{-v\,sin\,u\,; v\,cos\,u\,; k\};$$

$$\bar{r}_v^{/} = \{cos\,u\,; sin\,u\,; 0\};$$

$$\left(\bar{r}_u^{/}\right)^2 = \{v^2\,sin^2\,u + v^2\,cos^2\,u + k^2\} = \{v^2 + k^2\};$$

$$\left(\bar{r}_v^{/}\right)^2 = \{cos^2\,u + sin^2\,u\} = 1;$$

$$\left(r_u^{/} r_v^{/}\right) = \{-v\,sin\,u\,cos\,u + v\,cos\,u\,sin\,u\} = 0.$$

$$E = v^2 + k^2; F = 0; G = 1.$$

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{v^2 + k^2}.$$

$$\bar{r}_{uu}^{//} = \{-v\,cos\,u\,; -v\,sin\,u\,; 0\};$$

$$\bar{r}_{vv}^{//} = \{0; 0; 0\};$$

$$\bar{r}_{uv}^{//} = \{-\,sin\,u\,; cos\,u\,; 0\};$$

$$L = \begin{vmatrix} -v\,cos\,u & -\,v\,sin\,u & 0 \\ -v\,sin\,u & v\,cos\,u & k \\ cos\,u & sin\,u & 0 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{v^2 + k^2}}$$

$$= -v\,cos\,u\,(-k\,sin\,u) + v\,sin\,u\,(-k\,cos\,u) = 0.$$

$$N = 0.$$

$$M = \begin{vmatrix} -\,sin\,u & cos\,u & 0 \\ -v\,sin\,u & v\,cos\,u & k \\ cos\,u & sin\,u & 0 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{v^2 + k^2}} =$$

$$= (-\,sin\,u\,(-k\,sin\,u) - cos\,u\,(-k\,cos\,u)) \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{v^2 + k^2}} = \frac{k}{\sqrt{v^2 + k^2}}.$$

$$II = \frac{2k}{\sqrt{v^2 + k^2}}\,dudv.$$

Відповідь: $II = \frac{2k}{\sqrt{v^2+k^2}}\,dudv.$

№2. Знайти головні кривини прямого гелікоїда

$$x = u\cos v\,, y = u\sin v\,, z = av.$$

Розв'язання:

$$r_u^{/} = \{\cos v\,; \sin v\,; 0\};$$

$$r_v^{/} = \{-u\sin v\,; u\cos v\,; a\};$$

$$\left(r_u^{/}\right)^2 = \{\cos^2 v + \sin^2 v + 0\} = 1;$$

$$\left(r_v^{/}\right)^2 = \{u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v + a^2\} = \{u^2 + a^2\};$$

$$\left(r_u^{/} r_v^{/}\right) = \{-u\cos v\sin v + u\cos v\sin v + 0\} = 0;$$

$$E = 1; G = u^2 + a^2; F = 0;$$

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{u^2 + a^2};$$

$$r_{uu}^{//} = \{0; 0; 0\};$$

$$r_{vv}^{//} = \{-u\cos v; -u\sin v; 0\};$$

$$r_{uv}^{//} = \{-\sin v\,; \cos v\,; 0\};$$

$$L = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & a \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}} = 0;$$

$$M = \begin{vmatrix} -\sin v & \cos v & 0 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & a \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}} =$$

$$= (-\sin v \cdot a\sin v - \cos v \cdot a\cos v) \cdot \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}} =$$

$$= -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}};$$

$$N = \begin{vmatrix} -u\cos v & -u\sin v & 0 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & a \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}} =$$

$$= (-u\cos v \cdot a\sin v + u\sin v \cdot a\cos v) \cdot \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}} =$$

$$= 0;$$

Знайдемо головні кривини, розв’язавши квадратне рівняння відносно змінної k.

$$(EG-F^2)k^2-(EN+GL-2FM)k+LN-M^2=0.$$

Складемо рівняння:

$$(u^2+a^2)k^2-\frac{a^2}{u^2+a^2}=0;$$

$$(u^2+a^2)k^2=\frac{a^2}{u^2+a^2};$$

$$k^2=\frac{a^2}{(u^2+a^2)^2};k_{1,2}=\pm\frac{a}{u^2+a^2};$$

$k_{1,2}=\pm\frac{a}{u^2+a^2}$- головні кривини.

Відповідь: $k_{1,2}=\pm\frac{a}{u^2+a^2}$.

№3. Знайти повну і середню кривину поверхні:

$$\boldsymbol{z=axy,x=y=0};$$

Розв’язання:

$$K=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2},H=\frac{1}{2}\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^2}$$

$$p=z_x^/,q=z_y^/,r=z^{//}{}_{xx},s=z^{//}{}_{xy},t=z^{//}{}_{yy}.$$

Знайдемо частинні похідні.

$$p=z_x^/=ay\big|_{y=0}=0,$$

$$q=z_y^/=ax\big|_{x=0}=0,$$

$$r=z^{//}{}_{xx}=0,$$

$$s=z^{//}{}_{xy}=a,$$

$$t=z^{//}{}_{yy}=0.$$

Підставимо знайдені значення частинних похідних у формули:

$$K = \frac{0 - a^2}{(1 + 0 + 0)^2} = -a^2,$$

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{0}{1} = 0.$$

Відповідь: $K = -a^2, H = 0$.

Завдання для аудиторної роботи

1. Знайти другу квадратичну форму поверхні обертання:

   а) $x = R\cos v\,, y = R\sin v\,, z = u^2$.

   б) $x = (a + b\cos u)\cos v\,, y = (a + b\cos u)\sin v\,, z =$
   $= b\sin u$.

2. Знайдіть головні напрями і головні кривини прямого гелікоїда $x = u\cos v\,, y = u\sin v\,, z = av$.

3. Знайдіть головні кривини поверхні $z = xy$ в точці $M(1;1;1)$.

4. Знайдіть головні кривини поверхні $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ в точці $(0;0;0)$.

5. Знайдіть повну і середню кривину прямого гелікоїда $x = u\cos v\,, y = u\sin v\,, z = av$.

Завдання для самостійної роботи

1. Напишіть другу квадратичну форму поверхонь:

   а) $\bar{r} = \{r\cos u\cos v\,; r\cos u\,\sin v\,; r\sin u\}$;

   б) $\bar{r} = \{v\cos u\,; v\sin u\,; ku\}$.

2. Знайдіть нормальну кривину параболоїда $z = ax^2 +$ $+by^2$ в точці $P(0;0;0)$ в напрямку $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$.

3. Знайдіть середню та гаусову кривини параболоїда $z = axy$ в точці $x = y = 0$.
4. Знайдіть гаусову кривину з лінійним елементом $ds^2 = \lambda(u; v)(du^2 + dv^2)$.

Відповіді

Завдання для аудиторної роботи

1. б) $E=b^2$, $G=(a+b\cos u)^2$, $F = 0$, $L = b$, $N = \cos u|a+b\cos u|$, $M = 0$. *2.* $E = 1$, $F = 0$, $G = u^2 + a^2$, $L = 0$, $N = 0$, $M = \frac{-a}{\sqrt{u^2+a^2}}$, $k = \pm\frac{a}{u^2+a^2}$. *3.* $E = 2$, $F = 1$, $G = 2$, $L = 0$, $N = 0$, $M = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $k_1 = \frac{\sqrt{3}}{9}$, $k_2 = \frac{-\sqrt{3}}{3}$. *4.* $k_1 = \frac{1}{p}$, $k_2 = \frac{1}{q}$. *5.* $H=0$, $k = \frac{-a^2}{(a^2+u^2)^2}$.

Завдання для самостійної роботи

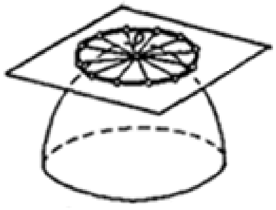
1. а) $II=R(du^2+\cos^2 u\,dv^2)$. б) $E = v^2+k^2$, $F = 0$, $G = 1$, $L = \frac{-vk\sin 2u}{\sqrt{v^2+k^2}}$, $M = 0$, $N = \frac{2k}{\sqrt{v^2+k^2}}$. *2.* $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$, $L = 2a$, $M = 0$, $N = 2b$, $du = 1$, $dv = 0{,}5$, $k_n = \frac{8a+2b}{5}$. *3.* $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$, $L = 0$, $M = a$, $N = 0$, $K = -a^2$, $H = 0$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 11
КЛАСИФІКАЦІЯ ТОЧОК НА ПОВЕРХНІ. ІНДИКАТРИСА ДЮПЕНА

1.Класифікація точок на поверхні
2. Індикатриса Дюпена

Короткі теоретичні відомості

Індикатриса Дюпена (індикатриса кривини) – це плоска крива, розташована в дотичній	Індикатриса Дюпена будується в дотичній площині. Для кожного напрямку в дотичній площині відкладається

площині до поверхні 	відрізок, довжина якого обернено пропорційна квадратному кореню абсолютної величини нормальної кривини в цьому напрямку. Геометричне місце кінців відрізків називається індикатрисою кривини поверхні в точці або індикатрисою Дюпена
Рівняння індикатриси кривини	$\lvert Lx^2+2Mxy+Ny^2\rvert=1$
Індикатриса	візуалізує розподіл нормальної кривини в околі заданої точки
	її форма відображає гаусову кривину поверхні в цій точці
	є геометричним місцем кінців відрізків, які відображають міру кривини в різних напрямках
Індикатриса кривини	
еліпс – в еліптичній точці поверхні	$LN-M^2>0$
пара спряжених гіпербол – в гіперболічній точці	$LN-M^2<0$
пара паралельних прямих – в параболічній точці	$LN-M^2=0$
Класифікація точок на поверхні	
Еліптична	Якщо в ній гаусова кривина додатна. Якщо функція задана рівнянням $z=z(x,y)$, то

	$z_{xx}^{//} z_{yy}^{//} - \left(z_{xy}^{//}\right)^2 > 0.$ Індикатриса Дюпена – еліпс
Омбілічною	Якщо в ній головні кривини однакові в будь-якому напрямку $k_1 = k_2 \neq 0$. Якщо функція задана рівнянням *z=z(x,y)*, при $\frac{E}{L} = $ $= \frac{F}{M} = \frac{G}{N}$. Якщо індикатриса Дюпена є колом
Гіперболічною	Якщо в ній гаусова кривина від'ємна. Якщо функція задана рівнянням *z=z(x,y),* то $z_{xx}^{//} z_{yy}^{//} - \left(z_{xy}^{//}\right)^2 < 0.$ Якщо індикатриса Дюпена є парою гіпербол

Параболічною	Якщо гаусова кривина дорівнює нулю, але одна із головних кривин не нульова.
	Якщо функція задана рівнянням *z=z(x,y),*
	то $z_{xx}^{//} z_{yy}^{//} - \left(z_{xy}^{//}\right)^2 = 0,$
	але $\left(z_{xx}^{//}\right)^2 + \left(z_{yy}^{//}\right)^2 +$ $+\left(z_{xy}^{//}\right)^2 \neq 0.$
	Якщо індикатриса Дюпена є парою паралельних прямих

Точкою сплощення	Якщо в ній головні кривини дорівнюють нулю

Типові завдання

№1. Дослідити характер точок поверхні $z = xy$.

Розв'язання:

Будемо перевіряти умову $z_{xx}^{//} z_{yy}^{//} - \left(z_{xy}^{//}\right)^2$.

Знайдемо частинні похідні:

$$z_x^{/} = y; z_y^{/} = x;$$

$$z_{xx}^{//} = 0; z_{yy}^{//} = 0; z_{xy}^{//} = 1;$$

$$z_{xx}^{//} z_{yy}^{//} - \left(z_{xy}^{//}\right)^2 = 0 - 1 = -1 < 0.$$

Отже, всі точки поверхні гіперболічні.

Відповідь: гіперболічні.

№2. Дослідити характер точок на поверхні:

$$\boldsymbol{\bar{r} = \{v \cos u\,; v \sin u\,; ku\}}.$$

Розв'язання:

$$\bar{r}_u^{/} = \{-v \sin u\,; v \cos u\,; k\};$$

$$\bar{r}_v^{/} = \{\cos u\,; \sin u\,; 0\};$$

$$\left(\bar{r}_u^{/}\right)^2 = \{v^2 \sin^2 u + v^2 \cos^2 u + k^2\} = \{v^2 + k^2\};$$

$$\left(\bar{r}_v^{/}\right)^2 = \{\cos^2 u + \sin^2 u\} = 1;$$

$$\left(r_u^{/} r_v^{/}\right) = \{-v \sin u \cos u + v \cos u \sin u\} = 0.$$

$$E = v^2 + k^2; F = 0; G = 1.$$

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{v^2 + k^2}.$$

$$\bar{r}_{uu}^{//} = \{-v \cos u\,; -v \sin u\,; 0\};$$

$$\bar{r}_{vv}^{//} = \{0; 0; 0\};$$

$$\bar{r}_{uv}^{//} = \{-\sin u\,; \cos u\,; 0\};$$

$$L = \begin{vmatrix} -v\cos u & -v\sin u & 0 \\ -v\sin u & v\cos u & k \\ \cos u & \sin u & 0 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{v^2+k^2}} =$$

$$= (-v\cos u\,(-k\sin u) + v\sin u\,(-k\cos u)) \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{v^2+k^2}} = 0.$$

$$N = 0.$$

$$M = \begin{vmatrix} -\sin u & \cos u & 0 \\ -v\sin u & v\cos u & k \\ \cos u & \sin u & 0 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{v^2+k^2}} =$$

$$= (-\sin u\,(-k\sin u) - \cos u\,(-k\cos u)) \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{v^2+k^2}} = \frac{k}{\sqrt{v^2+k^2}}.$$

$$K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}.$$

$$K = -\frac{k^2}{(v^2+k^2)^2}.$$

Оскільки, $K<0$, то всі точки заданої поверхні гіперболічні.

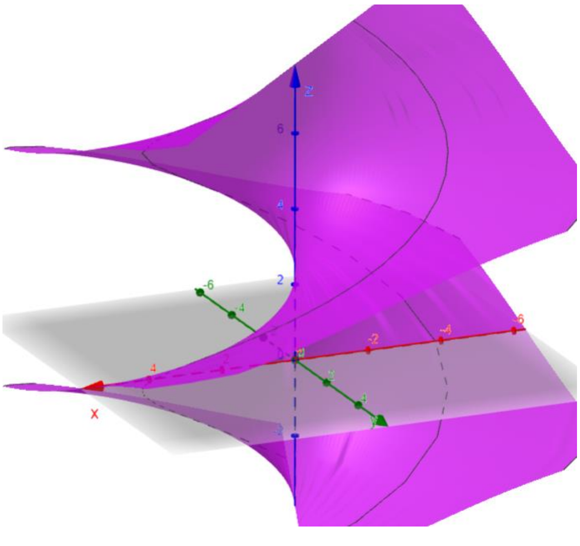


Рис.11.1

Відповідь: гіперболічні.

№3. Для поверхні $z = 2x^2 + \frac{9}{2}y^2$ скласти рівняння індикатриси Дюпена в точці (0; 0; 0).

Розв'язання:

Дотична площина до поверхні в точці (0;0;0) співпадає з xOy, тому рівняння індикатриси Дюпена має вигляд: $|Lx^2+2Mxy+Ny^2|=1$. Обчислюємо коефіцієнти другої квадратичної форми:

$$L = \frac{z_{xx}}{\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}}|(0,0) = 4, M = \frac{z_{xy}}{\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}}|(0,0) = 0,$$

$$N = \frac{z_{yy}}{\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}}|(0,0) = 9.$$

Тому рівняння індикатриси Дюпена: $4x^2 + 9y^2 = \pm 1$ або $4x^2 + 9y^2 = 1$.

Це рівняння еліпса, тому поверхня в околі точки початку координат опукла і розташована по один бік від дотичної площини. Зокрема дана поверхня є поверхнею другого порядку – еліптичний параболоїд, всі точки якого еліптичні.

Завдання для аудиторної роботи

1. З'ясуйте характер точок на поверхнях, утворених обертанням синусоїди $y=sinx$ навколо: а) осі Ox, б) осі Oy.

2. З'ясуйте характер точок на наступних поверхнях другого порядку: а) однопорожнинний гіперболоїд; б) параболічний циліндр, в) конус без вершини.

3. Покажіть, що всі точки поверхні $x + y = z^3$ параболічні.
4. Для заданої поверхні скласти рівняння індикатриси Дюпена в заданій точці:

   а) $z + 2 = x^2 - y^2 + 2x$ в точці M(-1; 0; -3);

   б) $x = z^2 + y^2 + 2\,y$ в точці M(1; -1; 0).

5. Знайдіть омбілічні точки на поверхні $z = x^2 + y^2$.

Завдання для самостійної роботи

1. З’ясуйте тип точок тора.

2. З’ясуйте тип точок на поверхнях:

   а) $z = a^2x^4 + b^2y^4$, б) $z = x^4 + y^4 + x^2y^2$, в) $y = x^4$.

3. З’ясуйте тип точок еліпсоїда, гіперболоїда, параболоїда.

4. Знайдіть сферичні точки на еліптичному параболоїді.

5. Для заданої поверхні скласти рівняння індикатриси Дюпена в заданій точці:

   а) $y = x^2 - z^2 + 2x$ в точці M(-1; 1; 0);

   б) $z = x^2 + 2x$ в точці M(0; 0; 0).

6. Знайдіть омбілічні точки на поверхні $xyz = a^3$.

Відповіді

Завдання для аудиторної роботи

4. а) спряжені гіперболи; б) еліпс. *5*. (0; 0; 0).

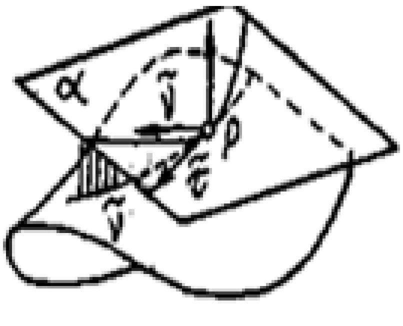
Завдання для самостійної роботи

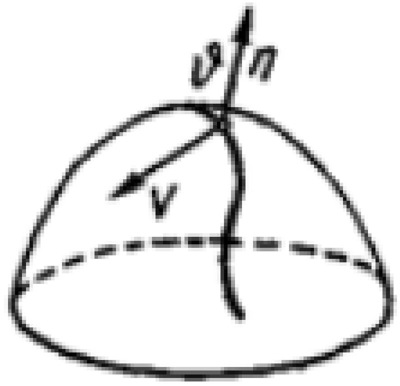
5. а) спряжені гіперболи; б) пара паралельних прямих. *6*. (a; a; a^3/xy).

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 12
АСИМПТОТИЧНІ ЛІНІЇ НА ПОВЕРХНІ. ГЕОДЕЗИЧНА КРИВИНА. ФОРМУЛИ ГАУСА-ПЕТЕРСОНА-КОДАЦЦИ

1. Асимптотичні лінії на поверхні
2. Геодезична кривина
3. Формули Гаусса – Петерсона – Кодацци

Короткі теоретичні відомості

Уявіть собі гладку поверхню Φ і криву γ, яка лежить на цій поверхні. Якщо ми візьмемо будь-яку точку P на цій кривій γ, ми можемо провести дотичну площину. Тепер, якщо ми розглянемо невеликий шматочок кривої γ навколо точки P і «спроєктуємо» його на цю дотичну площину α, ми отримаємо нову криву (назвемо її γ'). Кривина цієї нової кривої γ' у точці, яка відповідає P, і є **геодезичною кривиною** кривої γ у точці P	**Геодезична кривина** показує, наскільки сильно крива на поверхні відхиляється від того, щоб бути «прямою» на цій поверхні, і знак цієї кривини вказує, в який бік відбувається це відхилення відносно поверхні  $\kappa_g=\gamma''(s)\cdot(\vec{N}\times\gamma'(s))$, де $\vec{N}$ одиничний вектор нормалі до поверхні, а $\gamma'(s)$ та $\gamma''(s)$ - перша та друга похідні кривої за довжиною дуги
Нормальна кривина k_0 поверхні в даному напрямі $(du : dv)$, ν – кут, що утворює головна нормаль кривої і	$k\cos\nu = k_0 = const$ $k\cos\nu = \dfrac{II}{I}$

<table>
<tr><td>нормаль до поверхні</td><td></td></tr>
<tr><td>Напрям (du : dv) на регулярній поверхні Ф в точці P(u, v) називається асимптотичним, якщо нормальна кривина поверхні в цьому напрямі рівна нулю</td><td>$Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Теореми Гаусса – Петерсона – Кодацци
1) $\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=$
$$=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\begin{vmatrix} E E_u E_v \\ F F_u F_v \\ G G_u G_v \end{vmatrix}-$$
$$-\frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}\left\{\left(\frac{E_v-F_u}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_v-\left(\frac{F_v-G_u}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_u\right\},$$
2)$(EG-2FF+GE)(L_v-M_u)-$
$$-(EN-2FM+GL)(E_v-F_u)+$$
$$+\begin{vmatrix} E E_u L \\ F F_u M \\ G G_u N \end{vmatrix}=0,$$
3)$(EG-2FF+GE)(M_v-N_u)-$
$$-(EN-2FM+GL)(F_v-G_u)+$$
$$+\begin{vmatrix} E E_v L \\ F F_v M \\ G G_v N \end{vmatrix}=0.$$</td></tr>
</table>

Типові завдання

№1. Знайдіть асимптотичні лінії поверхні:

$$\boldsymbol{x = 3u + 3v; y = 3u^2 + 3v^2; z = 2u^3 + 2v^3.}$$

Розв'язання:

$r_u^/ = \{3; 6u; 6u^2\};$

$r_v^/ = \{3{,}6v, 6v^2\};$

$\left(r_u^/ r_v^/\right) = \{9 + 36uv + 36u^2v^2\} = \{(6uv + 3)^2\};$

$\left(r_u^/\right)^2 = \{9 + 36u^2 + 36u^4\} = \{(6u^2 + 3)^2\};$

$\left(r_v^/\right)^2 = \{9 + 36u^2 + 36u^4\} = \{(6u^2 + 3)^2\};$

$r_{uu}^{//} = \{0; 6; 12u\};$

$r_{vv}^{//} = \{0; 6; 12v\};$

$r_{uv}^{//} = \{0; 0; 0\}.$

Знайдемо коефіцієнти другої квадратичної форми.

$$L = \frac{(r''_{uu} r'_u r'_v)}{|r'_u \times r'_v|} = \frac{\begin{vmatrix} x''_{uu} & y''_{uu} & z''_{uu} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}};$$

$$M = \frac{(r''_{uv} r'_u r'_v)}{|r'_u \times r'_v|} = \frac{\begin{vmatrix} x''_{uv} & y''_{uv} & z''_{uv} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}};$$

$$N = \frac{(r''_{vv} r'_u r'_v)}{|r'_u \times r'_v|} = \frac{\begin{vmatrix} x''_{vv} & y''_{vv} & z''_{vv} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

$E = (6uv + 3)^2; G = (6uv + 3)^2; F = (6uv + 3)^2.$

$\sqrt{EG - F^2} = 1.$

$$L = \begin{vmatrix} 0\ 6\ 12u \\ 3\ 6u\ 6u^2 \\ 3\ 6v\ 6v^2 \end{vmatrix} = -6(18v^2 - 18u^2) + 12u(18v - 18u) =$$

$$= -108(v^2 - u^2) + 216u(v - u) =$$

$$= 108(v - u)^2;$$

M=0;

$$N = \begin{vmatrix} 0\ 6\ 12v \\ 3\ 6u\ 6u^2 \\ 3\ 6v\ 6v^2 \end{vmatrix} = -6(18v^2 - 18u^2) + 12v(18v - 18u) =$$

$$= -108(v^2 - u^2) + 216v(v - u) =$$

$$= 108(v - u)^2;$$

$108(v-u)^2du^2 + 108(v-u)^2dv^2 = 0$ –асимптотичні лінії.

Відповідь: $108(v-u)^2du^2 + 108(v-u)^2dv^2 = 0$.

№2. Знайти лінії кривини поверхні:

$$\boldsymbol{x = a(u+v). y = b(u-v), z = uv}.$$

Розв'язання:

Диференціальне рівняння лінії кривини

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

Знайдемо коефіцієнти квадратичних форм.

$r_u^/ = \{a; b; v\};$

$r_v^/ = \{a; b; u\};$

$\left(r_u^/ r_v^/\right) = \{a^2 - b^2 + uv\};$

$\left(r_u^/\right)^2 = \{a^2 + b^2 + v^2\};$

$\left(r_v^/\right)^2 = \{a^2 + b^2 + u^2\};$

$r_{uu}^{//} = \{0; 0; 0\};$

$r_{vv}^{//} = \{0; 0; 0\};$

$$r_{uv}^{//} = \{0; 0; 1\}.$$

$$E = a^2 + b^2 + v^2; G = a^2 + b^2 + u^2; F = a^2 - b^2 + uv.$$

$$L = 0; N = 0; M = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & b & v \\ a & -b & u \end{vmatrix} = -2ab.$$

Тоді рівняння лінії кривини визначається рівнянням

$$Gdv^2 = Edu^2.$$

Тобто $\sqrt{G}dv = \sqrt{E}du$ або $-\sqrt{G}dv = \sqrt{E}du$.

Інтегруючи дані рівняння, маємо два сімейства ліній кривини:

$$c_1(u + \sqrt{a^2 + b^2 + u^2}) = v + \sqrt{a^2 + b^2 + v^2};$$

$$c_1 = (u + \sqrt{a^2 + b^2 + u^2})(v + \sqrt{a^2 + b^2 + v^2}).$$

№3. Чи існує поверхня із заданими першою і другою квадратичними формами ?

$$\boldsymbol{I = du^2 + 5dv^2; II = 4du^2 + 2dudv}.$$

Розв’язання:

Перевіримо виконання умов Гаусса – Петерсона – Кодацци.

$$1)\ \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = \frac{1}{(EG-F^2)^2}\begin{vmatrix} EE_uE_v \\ FF_uF_v \\ GG_uG_v \end{vmatrix} - \frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}\left\{\left(\frac{E_v-F_u}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_v - \right.$$

$$\left. -\left(\frac{F_v-G_u}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_u\right\};$$

$$2)(EG - 2FF + GE)(L_v - M_u) - (EN - 2FM + GL)(E_v - F_u) +$$

$$+\begin{vmatrix} EE_uL \\ FF_uM \\ GG_uN \end{vmatrix} = 0;$$

$$3)(EG - 2FF + GE)(M_v - N_u) - (EN - 2FM + GL)(F_v - G_u) +$$

$$+\begin{vmatrix} EE_vL \\ FF_vM \\ GG_vN \end{vmatrix} = 0.$$

Знайдемо коефіцієнти першої та другої квадратичних форм.

$E = 1, F = 0, G = 5, L = 4, M = 1, N = 0.$

Підставимо знайдені коефіцієнти у першу умову, маємо:

$$\frac{0-1}{5-0} = \frac{1}{25}\begin{vmatrix}100\\000\\500\end{vmatrix} - \frac{1}{2\sqrt{5-0}}(0-0);$$

$$-\frac{1}{5} \neq 0.$$

Оскільки, перша умова не виконується, то не існує поверхні з заданими першою та другою квадратичними формами.

Відповідь: не існує.

Завдання для аудиторної роботи

1. Доведіть, що лінії $v^2du^2 - u^2dv^2 = 0$, які лежать на гелікоїді $x = u\,cos\,v\,, y = u\,sin\,v\,, z = av$, утворюють спряжену сітку.

2. Дослідить асимптотичні лінії тора: *x = (a+bcosu)cosv, y = (a+bcosu)sinv, z = bsinu.*

3. Знайдіть асимптотичні лінії прямого гелікоїда:
   $x = u\,cos\,v\,, y = u\,sin\,v\,, z = av.$

4. Знайдіть лінії кривини поверхні $x = u^2 + v^2, y = u^2 - v^2, z = v$.

5. Покажіть що координатні лінії поверхні $x = 3u - u^3 + +3uv^2, y = v^3 - 3u^2v - 3v, z = 3(u^2 - v^{)2}$, є лініями кривини.

6. Знайдіть геодезичну кривину гвинтових ліній *u=const*, які лежать на прямому гелікоїді

$$x = u\cos v\,, y = u\sin v\,, z = av.$$

7. Знайдіть лінії кривини конічної поверхні:

$$x = u\cos v\,, y = u\sin v\,, z = au.$$

8. Покажіть, що геодезична кривина в точках асимптотичної лінії дорівнює її кривині.

9. Знайдіть геодезичні кривини координатних ліній поверхні з лінійним елементом $Edu^2 + Gdv^2 = 0$.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайдіть асимптотичні лінії однопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

2. Знайдіть асимптотичні лінії поверхні $z = xy^3 - yx^3$ в точці $M(1;\,2;\,6)$.

3. Знайдіть асимптотичні лінії поверхні:

$$\vec{r} = \{u\cos v\,, u\sin v\,, a\cos n\,v\}, a, n = const.$$

4. Знайдіть лінії кривини гелікоїда, заданого рівнянням $\vec{r} = \{u\cos v\,, u\sin v\,, av\}$.

5. Покажіть, що кожна геодезична лінія на циліндрі, перетинає прямолінійні твірні циліндра під постійним кутом.

Відповіді

Завдання для аудиторної роботи

1. $L = 0$, $M = \frac{-a}{\sqrt{u^2+a^2}}$, $N = 0$, $P = v^2$, $Q = 0$, $R = u^2$, $LR-MQ+NP=0$. *2.* $bdu^2+cosu(a+bcosu)dv^2= 0$. *4.* $u=c_1$, $v=c_2$. *5.* $F = M = 0$. *6.* $k = -\frac{u}{u^2+a^2}$. *7.* Меридіани $v=v_0$, кривина 0, паралелі $u=u_0$, кола з центрами $(0;\ 0;\ au_0)$, кривина $1/u_0$. *9.* $v=const$ $k_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\frac{\partial E}{\partial v}$, $u=const$ $k_g = -\frac{1}{2E\sqrt{G}}\frac{\partial G}{\partial u}$.

Завдання для самостійної роботи

2. $xy=2$, $x^2-y^2+3=0$. *4.* $\frac{du}{dv} = \pm\sqrt{u^2+a^2}$, $ln|u+\sqrt{u^2+a^2}| = \pm v + C$. *5.* Для кругового циліндра $\vec{r} = \{R\cos u, R\sin u, v\}$, $cos\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = const$.

<u>РОЗДІЛ 3</u>

ЕЛЕМЕНТИ ТОПОЛОГІЇ

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 13
ЕЛЕМЕНТИ ТОПОЛОГІЇ

1. *Топологічні простори*
2. *Неперервність, гомеоморфізм, відделимість, компактність*
3. *Многогранники. Правильні многогранники. Характеристика Ейлера*

Короткі теоретичні відомості

Топологічним простором називається впорядкована пара (X,T), де: X – це довільна множина точок. T – це сукупність підмножин множини X, які називаються **відкритими множинами**, що задовольняють трьом аксіомам: Сукупність T називається **топологією** на множині X	1) Порожня множина ($\emptyset$) та вся множина X є відкритими множинами (тобто $\emptyset \in T$ і $X \in T$). 2) Об'єднання будь-якої (скінченної чи нескінченної) кількості відкритих множин є відкритою множиною (якщо $U_i \in T$ для всіх $i \in I$, де I – довільна індексна множина, то $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathrm{T}$). 3) Перетин скінченної кількості відкритих множин є відкритою множиною (якщо $U_1, U_2, \dots, U_n \in T$, то $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathrm{T}$).

Множина $V \subseteq X$ називається околом точки $x \in X$, якщо існує відкрита множина $U \in T$ така, що $x \in U \subseteq V$	Це множина, яка містить x і, в певному сенсі, всі точки, «достатньо близькі» до x
Відкриті множини – це ті, які містять околи кожної своєї точки	У випадку з дійсними числами (R) зі стандартною топологією, відкриті інтервали $(a;\ b)$ є відкритими множинами, оскільки для будь-якої точки x в інтервалі $(a;\ b)$ можна знайти менший відкритий інтервал $(x-\mathcal{E}, x+\mathcal{E})$, який повністю міститься в $(a;\ b)$
Замкнена множина	$A \subseteq X$ називається **замкненою**, якщо її доповнення $X \setminus A$ є відкритою множиною
Замкнений інтервал $[a;\ b]$, де $a<b$.	Його доповнення $R \setminus [a;b]=(-\infty;a) \cup (b;\infty)$ є об'єднанням двох відкритих інтервалів, отже, є відкритою множиною
Відкрито-замкнена (клопен) – множина, яка одночасно і відкрита, і замкнена.	Порожня множина $\emptyset$ і вся множина X завжди є відкрито-замкненими
Ні відкрита, ні замкнена множина	Піввідрізок $[a;\ b)$ або півінтервал $(a;\ b]$. Для $[a;\ b)$: множина не є відкритою, оскільки вона не містить жодного відкритого околу точки a, який би повністю належав $[a;\ b)$. Її доповнення $R \setminus [a,b)=(-\infty;$

	a)∪[b; ∞) не є відкритою множиною, оскільки вона не містить жодного відкритого околу точки b, який би повністю належав $R\setminus[a; b)$
Базова множина (або просто основна множина) – це вихідна множина, над елементами якої будуються певні структури або розглядаються певні властивості (X,T), де T – це сукупність підмножин X, то X є базовою множиною. Топологія T визначається на основі елементів X	Множина, з якої ми починаємо наше дослідження або побудову. Всі інші множини є підмножинами цієї базової множини або утворюються з її елементів
Неперервність функції в точці	Функція f: $X\rightarrow Y$ є неперервною в точці $x\in X$, якщо для будь-якого околу V точки $f(x)$ в Y існує окіл U точки x в X такий, що $f(U)\subseteq V$
Збіжність послідовності	Послідовність (x_n) збігається до точки x, якщо для будь-якого околу V точки x існує таке N, що для всіх $n\geq N$, $x_n\in V$
Внутрішність множини	Точка x є **внутрішньою точкою** множини A, якщо існує відкритий окіл U точки x такий, що $U\subseteq A$
Замикання множини	Точка x належить замиканню множини A, якщо

	кожен окіл x має непорожній перетин з A
Точка $x \in X$ називається точкою дотику множини $A \subseteq X$, якщо будь-який окіл точки x має непорожній перетин з множиною A	Для будь-якої відкритої множини $U \in T$ такої, що $x \in U$, виконується $U \cap A \neq \emptyset$. Точка x є точкою дотику A, якщо вона або сама належить A, або є «як завгодно близькою» до точок з A
Точка $x \in X$ називається граничною точкою множини $A \subseteq X$, якщо будь-який окіл точки x містить принаймні одну точку з A, відмінну від x	Для будь-якої відкритої множини $U \in T$ такої, що $x \in U$, виконується $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$
Якщо x є *граничною точкою* A, то x ***обов'язково є точкою дотику*** A	Якщо $x \in A$ і існує окіл x, який не містить інших точок з A, то x є точкою дотику A, але не є граничною точкою A. Такі точки називаються **ізольованими** точками множини A
Точка дотику – будь-який окіл точки має хоча б одну спільну точку з множиною (сама точка може належати множині)	**Гранична точка** – будь-який окіл точки має хоча б одну спільну точку з множиною, *відмінну* від самої точки (точка при цьому не обов'язково має належати множині)
Множина всіх точок дотику множини A називається **замиканням** множини A і позначається $\bar{A}$ або $d(A)$. Замикання множини завжди	Множина всіх граничних точок множини A називається **похідною множиною** A і позначається A'. Зами-

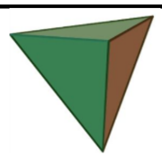
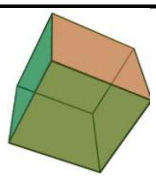
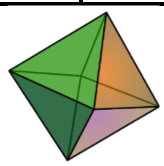
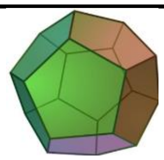
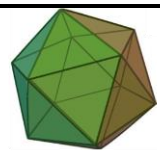
<table>
<tr><td>є замкненою множиною і є найменшою замкненою множиною, що містить A</td><td>кання множини можна також виразити як об'єднання самої множини та її похідної множини: $\bar{A}=A\cup A'$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Два простори називаються гомеоморфними, якщо між ними існує хоча б один гомеоморфізм. З точки зору топології, гомеоморфні простори вважаються нерозрізненими, оскільки вони мають однакові топологічні властивості</td></tr>
<tr><td colspan="2">Нехай (X, T_X) і (Y, T_Y) – два топологічні простори. Функція $f\colon X\rightarrow Y$ називається гомеоморфізмом, якщо вона задовольняє наступним трьом умовам:
Бієктивність: f є бієкцією, тобто вона є одночасно ін'єктивною (кожний елемент Y відображається щонайбільше одним елементом X) та сюр'єктивною (кожний елемент Y відображається хоча б одним елементом X). Це означає, що існує обернена функція $f^{-1}\colon Y\rightarrow X$.
Неперервність: Функція f є неперервною. Це означає, що для будь-якої відкритої множини $V\subseteq Y$, її прообраз $f^{-1}(V)\subseteq X$ є відкритою множиною в X.
Неперервність оберненої функції: Обернена функція $f^{-1}\colon Y\rightarrow X$ також є неперервною. Це означає, що для будь-якої відкритої множини $U\subseteq X$, її прообраз $(f^{-1})^{-1}(U)=f(U)\subseteq Y$ є відкритою множиною в Y</td></tr>
<tr><td>Покриттям множини X називається така сім’я (X_λ) її підмножин, що множина X являється об’єднанням цих підмножин. Покриття (X_λ) є відкритим, якщо кожне X_λ відкрите</td><td>Покриття множини X називається розбиттям цієї множини, якщо елементи покриття – непорожні множини і будь-які два різних елемента покриття не перетинаються</td></tr>
</table>

Основні характеристики	
покриття: Підмножини в покритті можуть **перетинатися**.	**розбиття**: Розбиття повністю «розкладає» множину A на непорожні частини, що не перетинаються.
Підмножини в покритті **не обов'язково** повинні бути диз'юнктними.	Підмножини в розбитті є **попарно диз'юнктними** (тобто такі, що не мають спільних точок).
Кожен елемент множини A повинен належати **хоча б одній** підмножині з покриття.	Кожен елемент множини A належить **рівно одній** підмножині з розбиття.
Покриття може містити **зайві** підмножини або частини підмножин, які не є необхідними для покриття A.	Усі підмножини в розбитті є **непорожніми.**
Об'єднання підмножин містить всю множину (або дорівнює їй)	Будь-яке розбиття множини є її покриттям (де об'єднання підмножин дорівнює множині), але не кожне покриття є розбиттям
Топологічний простір (X, T) називається **компактним**, якщо він задовольняє аксіому Бореля-Лебега: кожне відкрите покриття містить скінченне підпокриття	Відкрите покриття: $[a; b] \subseteq$ $\subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$, де Ui – відкриті Скінченне підпокритття: $[a; b] \subseteq U_{i_1} \cup U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$ Якщо є спосіб «накрити» весь інтервал $[a; b]$ відкритими множинами, то завжди можна вибрати лише скінченну кількість цих множин, які все ще повністю покриватимуть $[a; b]$

<table>
<tr><td>Теорема Гейне-Бореля для дійсних чисел: підмножина евклідового простору R_n є компактною тоді і тільки тоді, коли вона є замкненою та обмеженою</td><td>Неперервні функції на компактних множинах обмежені та досягають своїх екстремальних значень</td></tr>
<tr><td>Топологічний простір X називається зв'язним, якщо його не можна представити у вигляді об'єднання двох непорожніх, диз'юнктних відкритих множин</td><td>Якщо існують дві відкриті множини U і V в X такі, що: $U\neq\emptyset$, $V\neq\emptyset$, $U\cap V=\emptyset$,
$U\cup V=X$, то простір X є незв'язним. Якщо такої пари відкритих множин не існує, то X є зв'язним</td></tr>
<tr><td colspan="2">Сфера є однозв'язною, тобто будь-яку замкнену криву на сфері можна неперервно стягнути в точку</td></tr>
<tr><td>
однозв’язна</td><td>
неоднозв’язна</td></tr>
<tr><td colspan="2">Відделимий топологічний простір (або простір з властивістю відділення) – це топологічний простір, в якому точки або замкнені множини можуть бути певним чином «відокремлені» одна від одної за допомогою відкритих множин</td></tr>
<tr><td>T_0 (Простір Колмогорова)</td><td>Для будь-яких двох різних точок x і y, існує відкрита множина, що містить одну з них і не містить іншу. (Тобто,</td></tr>
</table>

	хоча б одну з двох точок можна відрізнити від іншої за допомогою відкритої множини)
T_1 (Простір Фреше або доступний простір)	Для будь-яких двох різних точок x і y, існує відкрита множина, що містить x і не містить y, і існує відкрита множина, що містить y і не містить x. (Тобто, кожну з двох різних точок можна відокремити від іншої за допомогою відкритої множини)
T_2 (Гаусдорфів простір) Більшість просторів, з якими ми зазвичай працюємо в аналізі та геометрії, є гаусдорфовими	Для будь-яких двох різних точок x і y, існують дві диз'юнктні відкриті множини U і V такі, що $x \in U$ і $y \in V$. (Тобто, дві різні точки можна відокремити двома відкритими околами, що не перетинаються)
T_3 (Регулярний простір)	Простір є T_3, якщо він є T_1 і для будь-якої точки x та будь-якої замкненої множини A, що не містить x, існують дві диз'юнктні відкриті множини U і V такі, що $x \in U$ і $A \subseteq V$. (Точку можна відокремити від замкненої множини, що її не містить, двома відкритими множинами, що не перетинаються)
$T_3½$ (Простір Тихонова або цілком регулярний простір):	Простір є $T_3½$, якщо він є T_1 і для будь-якої точки x та будь-якої замкненої множини A, що

	не містить x, існує неперервна функція f: X→[0; 1] така, що $f(x)=0$ і $f(y)=1$ для всіх $y \in A$. (Точку можна відокремити від замкненої множини неперервною функцією)
T_4 (Нормальний простір):	Простір є T_4, якщо він є T_1 і для будь-яких двох диз'юнктних замкнених множин A і B, існують дві диз'юнктні відкриті множини U і V такі, що $A \subseteq U$ і $B \subseteq V$. (Дві диз'юнктні замкнені множини можна відокремити двома відкритими множинами, що не перетинаються)
Многогранник нульового роду – це многогранник, поверхня якого топологічно еквівалентна сфері	**Многогранник нульового роду** – це такий многогранник, який можна «роздути» або «здути» до сфери без розривів і склеювань
Для будь-якого опуклого многогранника (а також для будь-якого многогранника нульового роду (g=0), що є клітинним розбиттям сфери) виконується **формула Ейлера**	$В - Р + Г = 2-2g$ де: $В$ – кількість вершин $Р$ – кількість ребер $Г$ – кількість граней g – рід (g = 0 для многогранника нульового роду)
Правильні многогранники (Платонові тіла) – **тетраедр, куб, октаедр, додекаедр, ікосаедр** – гомеоморфні сфері	
Ейлерова характеристика	$В - Р + Г = 2$

<table>
<tr><td colspan="3">Рід поверхні – топологічний інваріант, який описує кількість «дірок» у поверхні</td><td colspan="2">Оскільки всі правильні многогранники гомеоморфні сфері, вони мають рід 0</td></tr>
<tr><td colspan="3">Зв'язність</td><td colspan="2">Поверхня будь-якого правильного многогранника є зв'язною</td></tr>
<tr><td colspan="3">Компактність</td><td colspan="2">Поверхня є компактною, оскільки вона є замкненою та обмеженою підмножиною тривимірного евклідового простору</td></tr>
<tr><td colspan="3">Однозв'язність</td><td colspan="2">Оскільки правильні многогранники гомеоморфні сфері, їхні поверхні також є однозв'язними</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>тетраедр</td><td>куб</td><td>октаедр</td><td>додекаедр</td><td>ікосаедр</td></tr>
<tr><td colspan="5">Теорема (Ейлера). Для топологічно правильного многогранника нульового роду має місце рівність:
$\frac{1}{s}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{p}$, де s – кількість граней кожного многогранного кута, n – кількість вершин кожної грані, p – кількість ребер многогранника</td></tr>
</table>

Типові завдання

№1. Класифікувати множини: відкрита, замкнена, ні відкрита ні замкнена, відкрито-замкнена:

а) інтервал $(a; b)$;

б) $(-1; 0)\cup(1; 2)$;

в) декартовий добуток відкритих інтервалів;

г) множини у дискретній топології;

д) $\{a\}$; е) $(a; b]$; є) $\emptyset$.

Розв'язання:

а) інтервал $(a; b)$ – відкрита множина, оскільки для будь-якої точки x в інтервалі $(a; b)$ можна знайти менший відкритий інтервал $(x-\mathcal{E}; x+\mathcal{E})$, який повністю міститься в (a, b);

б) $(-1; 0)\cup(1; 2)$ – відкрита множина;

в) декартовий добуток відкритих інтервалів – відкритий прямокутник – відкрита множина;

г) множини у дискретній топології – відкриті;

д) $\{a\}$ – замкнена множина, оскільки її доповнення $R\backslash\{a\}=(-\infty; a)\cup(a; \infty)$ є об'єднанням двох відкритих інтервалів, отже, є відкритою множиною;

е) $(a; b]$ – ні відкрита ні замкнена: ця множина не є відкритою, оскільки вона не містить жодного відкритого околу точки b, який би повністю належав $(a; b]$. Її доповнення $R\backslash(a,b]=(-\infty; a]\cup(b; \infty)$ не є відкритою множиною, оскільки вона не містить жодного відкритого околу точки a, який би повністю належав $R\backslash(a; b]$;

є) $\emptyset$ – відкрито-замкнена, оскільки вона відкрита за аксіомами топології і замкнена, бо її доповнення $R\backslash\emptyset=R$ є відкритим.

№2. Показати, що для множини A=(1,2), точки 1 і 2 є точками дотику. Чи є точка 1 – граничною точкою?

Розв'язання:

Будь-який відкритий інтервал, що містить 1, наприклад $(1-\mathcal{E}; 1+\mathcal{E})$, має непорожній перетин з (1; 2) для будь-якого $\mathcal{E}>0$. Точка 2 також є точкою дотику з аналогічних міркувань. Будь-яка точка в [1; 2] є точкою дотику (1; 2).

Точка {1} не належить (1; 2), але існує окіл, наприклад, $(1-\mathcal{E}; 1+\mathcal{E})$, який має непорожній перетин з (1; 2) для будь-якого $\mathcal{E}>0$. Тому точка 1 є граничною точкою.

№3. Чи є гомеоморфними:

а) інтервал (0; 1) і дійсна пряма R;

б) квадрат без внутрішніх точок і коло;

в) сфера і тор?

Розв'язання:

а) інтервал (0; 1) і дійсна пряма *R*.

Необхідно задати функцію $f(x)$: $f(0)\to-\infty$, $f(1)\to\infty$. Наприклад, $f(x) = tg((x-0{,}5)\pi)$. Перевіримо:

$f(0)=tg((0-0{,}5)\pi)=tg(-0{,}5\pi)=-tg(0{,}5\pi)\to-\infty$;

$f(1)=tg((1-0{,}5)\pi)=tg(0{,}5\pi)=tg(0{,}5\pi)\to\infty$.

Функція $f(x)$ є неперервною на інтервалі (0; 1). Дійсно, функція $f(x)=tgx$ є неперервною на області визначення. Розглянемо один із проміжків з області визначення тангенса $(-0{,}5\pi; 0{,}5\pi)$.

$-0{,}5\pi <(x-0{,}5)\pi<0{,}5\pi$; $-0{,}5 <(x-0{,}5)<0{,}5$; $0<x<1$.

Знайдемо обернену функцію.

$x=tg((y-0{,}5)\pi)$; $(y-0{,}5)\pi=arctgx$; $y-0{,}5=(1/\pi)arctgx$;

$y=(1/\pi)arctgx+0{,}5$. Отже $f^{-1}(x)=(1/\pi)arctgx+0{,}5$.

Функція $f(x)=arctgx$ є неперервною на області визначення (0; π), а отже, й на інтервалі (0; 1).

Отже, (0; 1) і R є гомеоморфні.

б) квадрат без внутрішніх точок і коло.

Квадрат без внутрішніх точок і коло є гомеоморфні, оскільки межу квадрата можна деформувати у коло без розривів та склеювань. І навпаки.

в) сфера і тор.

Сфера є однозв'язною (будь-яку замкнену криву на сфері можна неперервно стягнути в точку), а тор – ні (наприклад, крива, що обходить «дірку» тора, не може бути стягнута в точку). Однозв'язність є топологічним інваріантом, оскільки він не зберігається, то сфера і тор не гомеоморфні.

Відповідь: а) так; б) так; в)ні.

№4. Чи є зв'язними простори:

а) [*a,b*] на дійсній прямій;

б) коло;

в) множина раціональних чисел Q;

г) дискретний простір, що містить більше однієї точки?

Розв'язання:

а) [*a, b*] на дійсній прямій – зв'язний, бо не можна розділити на дві окремі, диз'юнктні частини, які є відкритими, об'єднання яких дає весь відрізок;

б) коло – зв'язний;

в) множина раціональних чисел *Q* – незв'язна, оскільки між будь-якими двома раціональними числами завжди є ірраціональне число, яке «розриває» зв'язність;

г) дискретний простір, що містить більше однієї точки – незв'язний, оскільки кожна окрема точка є відкритою множиною, і простір можна розбити на об'єднання двох або більше диз'юнктних відкритих множин.

Відповідь: а) так; б) так; в)ні; г) ні.

№5. Як змінюється значення виразу *В–Р+Г* при додаванні нової вершини, ребра або грані до опуклого многогранника нульового роду таким чином, щоб він залишався многогранником нульового роду?

Розв'язання:

Додавання нової вершини на ребрі: якщо ми додаємо нову вершину на існуючому ребрі, одне ребро розбивається на два, а кількість вершин збільшується на 1. Кількість граней не змінюється. Отже, ΔB=+1, ΔP=+1, $\Delta Г$=0. Зміна *В–Р+Г* становить +1−1+0=0.

Додавання ребра, що з'єднує дві існуючі вершини на одній грані (розбиття грані): Додається одне нове ребро, і одна грань розбивається на дві. Кількість вершин не змінюється. Отже, ΔB=0, ΔP=+1, $\Delta Г$=+1. Зміна *В–Р+Г* становить 0−1+1=0.

Додавання нової вершини, ребер та грані (наприклад, «приклеювання» нової піраміди до грані): Якщо ми додаємо нову вершину, з'єднуючи її новими ребрами з вершинами існуючої грані, і додаємо нові грані, кількість вершин збільшується на 1, кількість ребер збільшується на кількість вершин грані, а кількість граней також збільшується на кількість вершин грані мінус 1 грань. Наприклад, якщо до трикутної грані приклеюємо піраміду: ΔB=+1, ΔP=+3, $\Delta Г$=3-1=+2. Зміна *В–Р+Г* становить +1−3+2=0.

При додаванні нового елемента до опуклого многогранника нульового роду таким чином, щоб він залишався многогранником нульового роду, значення виразу $В–Р+Г$ **залишається незмінним і дорівнює 2**.

Завдання для аудиторної роботи

1. Чи є пара $(X, Г)$ топологічним простором: а) $X=\{x, y, z\}$, $Г=\{\emptyset, \{x, y, z\}, \{x\}, \{y\}\}$; б) $X=\{x, y, z\}$, $Г=\{\emptyset, \{x, y, z\}, \{x, y\}, \{x\}\}$?

2. Класифікувати множини: відкрита, замкнена, ні відкрита ні замкнена, відкрито-замкнена:
   а) куля радіуса r з центром у точці x: $B(x,r)=\{y\in \mathrm{R}_n \mid \|x-y\|<r\}$;
   б) уся множина R_n в евклідовому просторі із стандартною топологією;
   в) $[a,\infty)$.

3. Показати, що для множини $B = \{\frac{1}{n} | n \in N\}$, точка 0 є точкою дотику. Чи є точка {0,5} граничною точкою?

4. Чи є гомеоморфні: а) коло і відрізок прямої; б) еліпсоїд і сфера? Якщо так, то задати гомеоморфізм. Якщо ні, то який топологічний інваріант порушується?

5. Побудувати гомеоморфізм між а) (a,b) і $(0,1)$; б) $[0,1]$ і $[1,2]$.

6. Чи є зв'язними: а) однопорожнинний гіперболоїд; б) двопорожнинний гіперболоїд; в) $\{a\}$; г) множина цілих чисел у стандартній топології R?

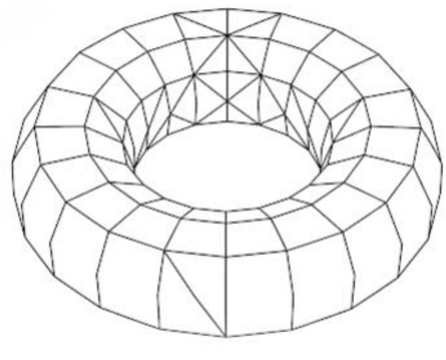
7. Для множини A={1,2,3} вказати сукупності множин, які є покриттями A; розбиттям A.

8. Дано тетраедр. Скільки він має вершин (B), ребер (P) та граней ($Г$)? Перевірте для нього справедливість теореми Ейлера: $B–P+Г=2$. Припустимо, ми «зрізаємо» одну з вершин тетраедра площиною, яка перетинає всі три ребра, що виходять з цієї вершини. Яка нова грань утворюється? На скільки збільшується кількість вершин, ребер та граней нового многогранника порівняно з тетраедром? Перевірте справедливість теореми Ейлера для отриманого многогранника.

9. Якій поверхні гомеоморфні такі многогранники, якого вони роду, чому дорівнює для них характеристика Ейлера:

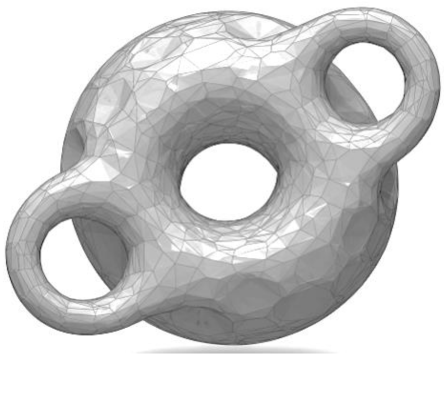
а)

б)



в)

г)



Завдання для самостійної роботи

1. Чи є пара (X, Γ) топологічним простором: а) $X=\{x, y\}$, $\Gamma=\{\emptyset, \{x, y\}, \{x\}\}$; б) $X=\{x, y, z\}$, $\Gamma=\{\emptyset, \{x, y, z\}, \{y\}\}$?

2. Задана множина $A=\{0\}\cup(1,2)$ у дійсній прямій R зі стандартною топологією. Чи є точка 0 точкою дотику? граничною точкою?

3. Чи гомеоморфний $[0,1]$ інтервалу $(0,1)$? Якщо так, то задати гомеоморфізм. Якщо ні, то який топологічний інваріант порушується?

4. Побудувати гомеоморфізм між $(-1,1)$ і R.

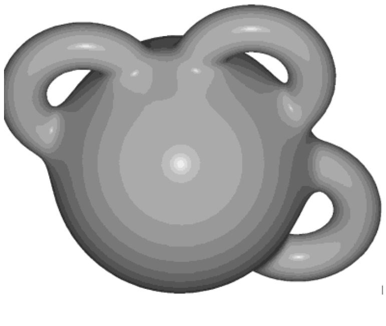
5. Чи є зв'язними: а) $(-\infty,3]$ на дійсній прямій; б) прямокутник (включаючи внутрішність та межу) в R^2; в) множина $R\setminus\{0\}$ (дійсні числа без нуля); г) гіпербола?

6. Вкажіть гомеоморфні між собою поверхні. Визначте їх рід.

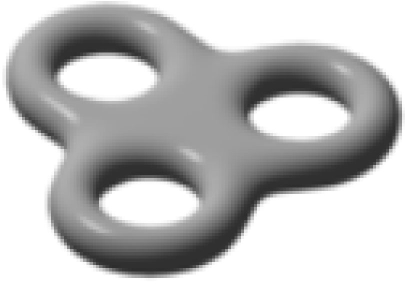
а)

б)

в)



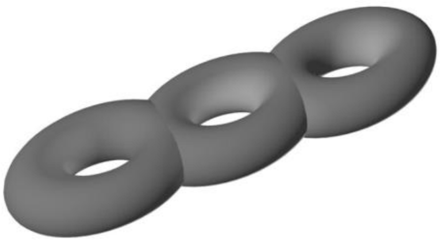
г)



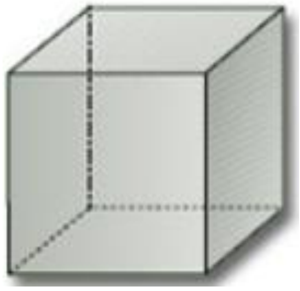
д)

е)

є)

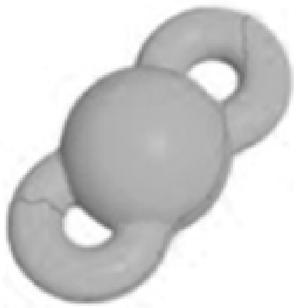


ж)



з)

і)



7. Дано куб. Уявіть, що ви «зрізаєте» ребро куба, замінюючи його новою прямокутною гранню. На скільки змінюється кількість вершин, ребер та граней куба після цієї операції? Перевірте, чи виконується теорема Ейлера для модифікованого куба.

Відповіді

Завдання для аудиторної роботи

1. а) ні; б) так. *2.* а) відкрита; б) відкрита; в) замкнена. *3*. ні. *4*. а) ні; однозв'язність; б) так; стиск до площин симетрії. *5*. а) так; б) ні. *6*. а) так; б) ні; в) так; г) ні. *8*. $В–Р+Г$=4–6+4=2; $В$=6, $Р$=9, $Г$=5, 6-9+5=2. *9*. а) кренделю (тор з двома дірками), рід 2, характеристика Ейлера -2; б) тор, рід 1, характеристика Ейлера 0; в) тор з трьома дірками (спінер), рід 3, характеристика Ейлера -4; г) тор з трьома дірками, рід 3, характеристика Ейлера -4.

Завдання для самостійної роботи

1. а) так; б) так. *2*. так; ні. *3*. ні; компактність. *5*. а) так; б) так; в) ні; г) ні. *6*. рід 0: а) ж); рід 1: б), е), з); рід 2: д), і); рід 3: в), г), є). *7*. 10-15+7=2.

ВИКОРИСТАННЯ GEOGEBRA Й DESMOS ДЛЯ ПОБУДОВИ КРИВИХ ТА ПОВЕРХОНЬ

GeoGebra – це безкоштовна та потужна математична програма, розроблена для всіх рівнів освіти. Вона об'єднує різні математичні інструменти, такі як геометрія, алгебра, таблиці, графіки, статистика та обчислення в одному зручному інтерфейсі.

Основні переваги GeoGebra включають її безкоштовність, доступність онлайн, офлайн та на мобільних пристроях, а також інтуїтивно зрозумілий інтерфейс з широким набором функцій.

У рамках курсу диференціальної геометрії GeoGebra доцільно використовувати для побудови кривих (як плоских так і просторових) і поверхонь заданих явно, неявно, параметрично.

Для побудови параметрично заданої кривої необхідно ввести слово «крива», прописати задання змінних, вказати параметр, його початкове і кінцеве значення (рис.1).

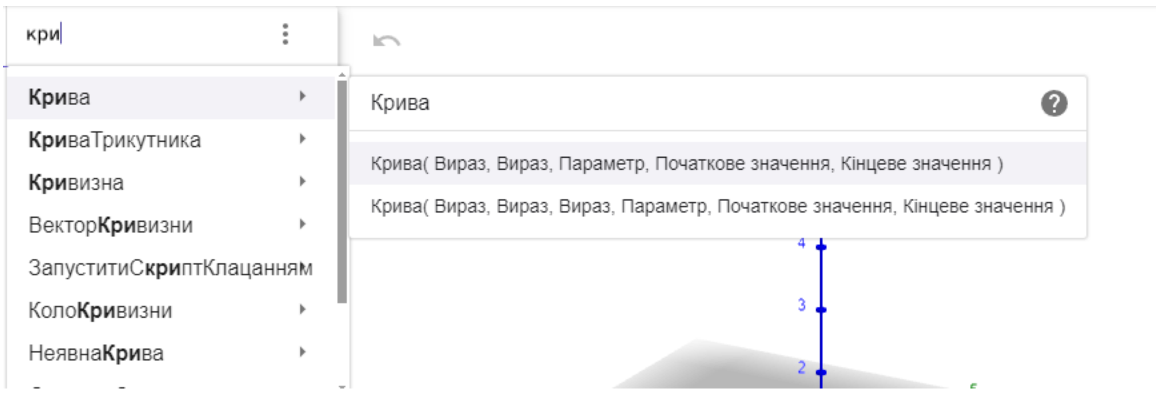


Рис.1. Задання кривої

У цій програмі є можливість визначити кривину кривої у вказаній точці, для чого необхідно поставити точку, обравши команду «точка на об'єкті», написати слово «кривизна», вказати назву точки і назву кривої. Рухаючи точку по кривій, ви будете отримувати різні результати кривини автоматично. Є можливість побудувати вектор кривини, коло кривини.

У цій програмі можна побудувати дотичні до кривих (прописуєте слово «дотична», вводити назву кривої і точки) та визначати кут між ними. Можна обчислити довжину кривої, прописавши слово «довжина», вибрати назву кривої, ввести початкову точку та кінцеву точку. У програмі можна побудувати асимптоту («слово «асимптота» і ім'я кривої).

Крім кривих можна задавати поверхні, задані явно, неявно і параметрично. Для останнього прописуєте слово «поверхня» і вводите змінні.

Desmos – це безкоштовний онлайн-інструмент для побудови математичних графіків, що дає змогу легко створювати складні візуалізації з використанням чисел та символів. Завдяки використанню повзунків, списків та алгебраїчних функцій в об'єктах, можна активно досліджувати, аналізувати, робити висновки та глибше розуміти взаємозв'язки між геометрією та алгеброю. Особливою перевагою Desmos є інтерактивність усіх створених графіків. Користувач може визначити змінну, і Desmos автоматично створить повзунок для її регулювання, відображаючи зміни на графіку в реальному часі. Крім того, можна безпосередньо взаємодіяти з точками на графіку, перетягуючи їх для спостереження за відповідними змінами.

Для побудови параметрично заданої кривої в Desmos необхідно просто набрати задання у круглих дужках через кому, використовуючи англійську розкладку або вбудовану у програму клавіатуру (рис.2.)

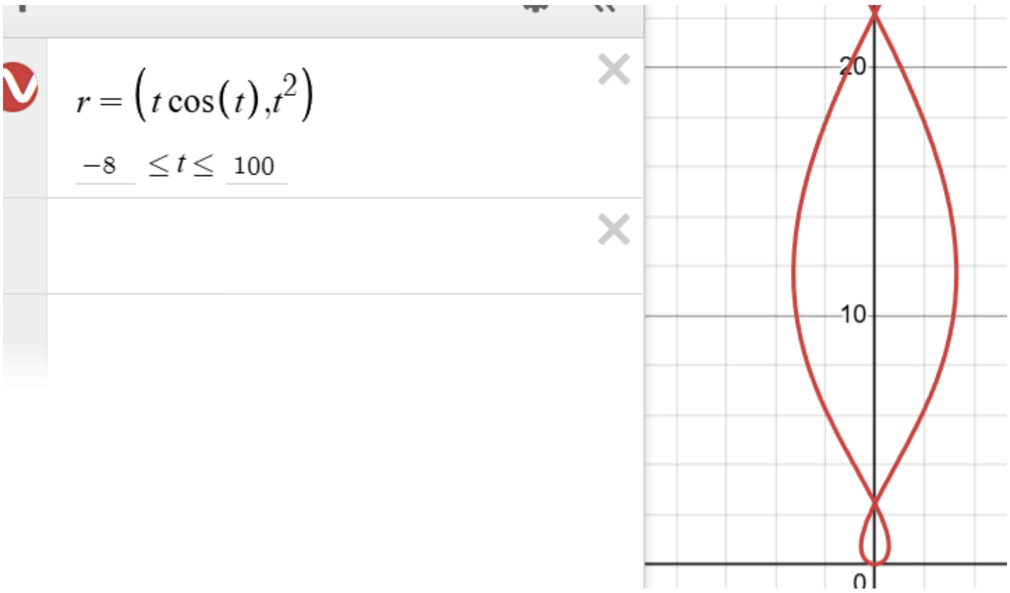


Рис.2. Задання параметрично заданої кривої в Desmos

Для полярного задання необхідно обрати у налаштуваннях «сітка» і використовувати літери *r* і *θ*:

Є можливість побудувати сім'ю кривих. Для цього необхідно задати список параметру, прописавши його значення у квадратних дужках: *a*=[1,1.1,1.2…] і ввівши рівняння кривої із тим самим параметром.

Для характеристики просторової кривої використовується супроводжуючий тригранник Френе, який є унікальним для кожної точки кривої. Цей тригранник складається із трьох векторів: дотичної, нормалі та бінормалі. Наочно продемонструвати цей тригранник можна за допомогою графічного редактора Desmos 3d.

Для цього в панелі задач потрібно прописати декілька функцій: *Vector helpers*, вам запропонується ввести параметри $V_0(b)=V(p(t_0),b)$, $V(a,b)=vector(a,a+b)$, $N_{ormalize}(v)=v/|v|$.

Далі вводити вашу криву $p(t)=(x(t),y(t),z(t))$. Вказуєте межі для параметру. І вводите вектори, що відповідають сторонам тригранника Френе: $T_0=V_0(T(t_0))$, $N_0=V_0(N(t_0))$, $B_0=T_0\times N_0$

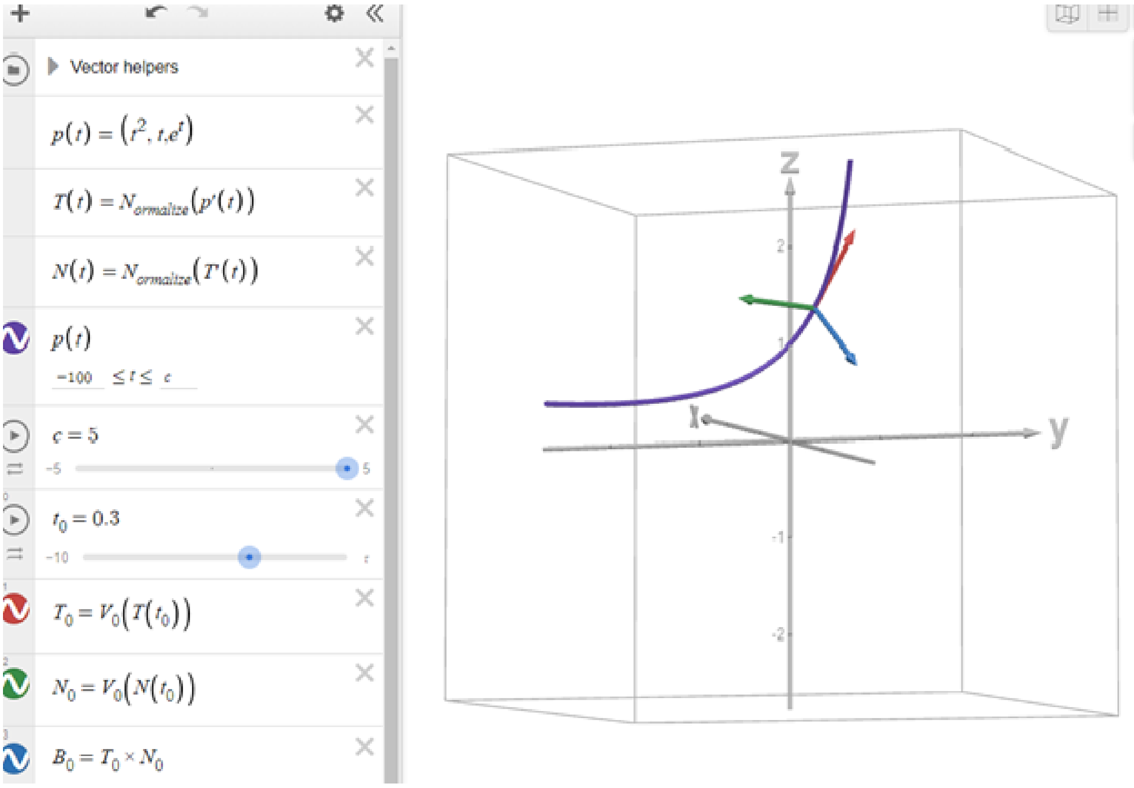


Рис.3. Тригранник Френе

Використання GeoGebra і Desmos під час вивчення диференціальної геометрії сприяє кращому розумінню теоретичного матеріалу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Баранник В.Ф., Тилищак О.А. Практикум з диференціальної геометрії. Ужгород: Ужгород. нац. ун-т, 2004. 58 с.
2. Борисенко О.А. Диференціальна геометрія і топологія. Харків : Основа, 1995. 304 с.
3. Величко І.Г., Гургенідзе М.О., Стєганцева П.Г. Диференціальна геометрія кривих та поверхонь. Запоріжжя: ЗНУ, 2009. 76 с.
4. Петренко С.В., Семеніхіна О.В. Елементи теорії кривих і поверхонь в курсі диференціальної геометрії. Суми : Видавництво «МакДен», 2010. 176 с.
5. Пришляк О.М. Диференціальна геометрія: курс лекцій. К.: Видавничо – поліграфічний центр «Київський університет», 2004. 68 с.
6. Трохименко В.С. Конспект лекцій з диференціальної геометрії і топології. Вінниця, 2009. 68 с.
7. Стєганцева П.Г., Стєганцев Є.В., Гречнєва М.О. Диференціальна геометрія і топологія: навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика». Запоріжжя : ЗНУ, 2019. 160 с.
8. Яковець В. П., Боровик В.Н. Курс диференціальної геометрії : навчальний посібник для студ. фіз.-мат. фак-ту. Ніжин: Ніжинський держ. пед. ун-т ім. М. Гоголя, 2004. 237 с.
9. Bert Mendelson. Introduction to Topology: Third Edition (Dover Books on Mathematics) Third Edition. Dover Publications; Third edition. 1990. 224 p.
10. Tristan Needham. Visual Differential Geometry and Forms: A Mathematical Drama in Five Acts. Princeton University Press. 2021. 584 p.

Навчальне видання

ЗАЇКА Оксана Володимирівна
СУХОЙВАНЕНКО Людмила Федорівна

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ: ПРАКТИКУМ

Комп'ютерна верстка *С.П. Цьома*

Підписано до друку 28.05.2025 р.
Формат 60×84/16. Гарнітура Cambria.
Папір офсетний. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 9,77.
Ум.-фарб. відб. 9,77. Обл.-вид. арк 8,12.
Тираж 100 пр. Вид № 37.

Видавець і виготовлювач: ФОП Цьома С.П.
40002, м. Суми, вул. Роменська, 100.
Тел.: 066-293-34-29.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
серія ДК, № 5050 від 23.02.