Наталія КУГАЙ

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

(практикум)

TRY IT
ОЖИВИ ГРАФІК

Міністерство освіти і науки України

Глухівський національний педагогічний університет імені Олександра Довженка

Наталія КУГАЙ

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

(практикум)

Навчально-методичний посібник

Глухів-2026

УДК 517.2(075.8)
К 88

Рекомендовано до друку та розповсюдження вченою радою Глухівського національного педагогічного університету імені Олександра Довженка
(протокол N 10 від 29 квітня 2026 р.)

Рецензенти:

ЧКАНА Ярослав – кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри математики, фізики та методик їх навчання Сумського державного педагогічного університету імені А. С. Макаренка

БУРЧАК Станіслав – доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри професійної освіти й комп'ютерних технологій Глухівського національного педагогічного університету імені Олександра Довженка

Кугай Н. В.
К 88 Диференціальне числення функцій кількох змінних (практикум) : навчально-методичний посібник. Глухів: Глухівський НПУ ім. О. Довженка, 2026. 68 с.

ISBN 978-966-376-152-7

Розглянуто практичні завдання з основних тем диференціального числення функцій кількох змінних (область визначення, лінії і поверхні рівня, границя і неперервність функції двох змінних, частинні похідні першого й вищих порядків, частинні й повний диференціали, похідні параметрично й неявно заданих функцій, формула Тейлора, застосування диференціального числення функцій двох змінних, елементи скалярного поля. Особливістю цього посібника є інтеграція традиційних теоретичних та практичних завдань із сучасними технологіями інтерактивної візуалізації. У кожній темі пропонується робота у середовищі GeoGebra 3D.

Для зручності користування матеріал посібника розбито за темами, на початку кожної з яких вміщено короткий виклад основних теоретичних положень, подано приклади розв'язування задач з теми заняття (навчальні завдання) та запропоновано завдання для аудиторної та самостійної роботи, додаткові завдання.

Для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «Бакалавр» освітньо-професійних програм «Середня освіта (Математика та інформатика)», «Середня освіта (Фізика та інформатика)», «Середня освіта (Інформатика)»; вчителям і викладачам математики різних закладів освіти.

УДК 517.2(075.8)

ISBN 978-966-376-152-7

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Вивчення математичного аналізу, зокрема розділу «Диференціальне числення функцій кількох змінних», часто супроводжується труднощами у візуалізації абстрактних математичних об’єктів. Цей посібник створено для того, щоб змінити фокус навчання: від простого заучування алгоритмів – до глибокого концептуального розуміння сутності математичних об’єктів.

Матеріал структуровано за сімома основними темами. До кожної теми наведено перелік теоретичних запитань, список літератури, коротко представлено основні теоретичні відомості цієї теми, навчальні завдання (показано розв’язання ключових задач теми), завдання для аудиторної роботи, завдання для самостійної роботи, додаткові завдання (як правило, це завдання підвищеної складності).

Особливістю цього посібника є інтеграція традиційних теоретичних та практичних завдань із сучасними технологіями інтерактивної візуалізації. У кожній темі (таких тем 7) пропонується робота у середовищі GeoGebra 3D, що сприяє самостійному дослідженню студентами сутності й поведінки ліній рівня, градієнта, локального, глобального й умовного екстремума функції кількох змінних, геометричної інтерпретації частинних похідних тощо. Методичні рекомендації щодо роботи у середовищі GeoGebra 3D описані у Додатку Г.

Для максимальної ефективності роботи з посібником пропонуємо дотримуватися такої послідовності під час роботи з інтерактивними аплетами (через QR-коди або покликання):

1. **Відкриття аплету:** Відскануйте QR-код або перейдіть за посиланням у середовищі GeoGebra 3D. Аплет автоматично згенерує динамічну модель досліджуваного математичного поняття.
2. **Інтерактивна взаємодія:** Використовуйте повзунки (параметри a, b, k та інші), щоб «оживити» модель. Спостерігайте, як зміна значень параметрів впливає на модель.
3. **Дослідження:** Використовуйте інструмент перерізів, слід точки тощо (як описано в Додатку Г), щоб побачити «внутрішню структуру» поверхні. Звертайте увагу на характерні точки (критичні точки, точки екстремуму тощо).
4. **Аналітичне порівняння:** Порівняйте отримані візуальні результати з вашими розрахунками (границею, значеннями похідних, точками екстремуму тощо). Якщо візуальна модель «сперечається» з вашими розрахунками – це сигнал ще раз перевірити аналітичний висновок.

Автор прагнула зробити матеріал максимально доступним, а процес навчання – дослідницьким. Сподіваюся, що поєднання аналітичного апарату класичного математичного аналізу з можливостями комп'ютерного моделювання допоможе вам не лише опанувати дисципліну, а й розвинути інтуїцію, дослідницькі вміння, критичне мислення, які так необхідні майбутньому фахівцю.

Посібник розроблено для підготовки до практичних занять і самостійної роботи здобувачів освіти з диференціального числення функції кількох змінних. Він може бути корисним також вчителям, викладачам математики різних закладів освіти.

Сподіваюся, що цей посібник стане надійним супутником для тих, хто бажає поглибити свої знання в галузі математики, та сприятиме розвитку вашого інтересу до цього захоплюючого предмета.

З найкращими побажаннями автор

ТЕМА 1. ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Теоретичні питання

1. Означення функції *n* змінних, її область визначення
2. Поняття функції 2-х змінних, її область визначення, графік, лінії рівня
3. Поняття функції 3-х змінних, її область визначення, поверхні рівня

Література:

1. Шкіль М.І. Математичний аналіз: Підручник. У 2-х ч. Ч.2. 3-є видання, переробл. і доп. Київ: Вища школа. 2005. 510 с. С. 73-181. Режим доступу: https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Shkil_P2_2005_510.pdf
2. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: Підручник: У 2-х ч. Ч. 2. Київ: Либідь. 2003. 304 с. С. 50-73. Режим доступу: https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Dorogovtsev_P2_1994_304.pdf
3. Lebl J. Basic Analysis II: Introduction to Real Analysis, Volume II. Oklahoma: Jiří Lebl / University of Oklahoma. 2024. 244 p. P. 131–190. Режим доступу: https://www.jirka.org/ra/realanal2.pdf

Повторити: 1. Область визначення елементарних функцій однієї змінної.
2. Рівняння прямої на площині. Криві другого порядку (канонічні рівняння, форма).
3. Рівняння площини. Поверхні другого порядку (канонічні рівняння, форма).

Основні теоретичні відомості

Нехай $W \subset R_n$. Якщо існує правило (закон, відповідність), за допомогою якого кожній точці $x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \in W$ відповідає ***єдине*** значення $u \in U \subset R$, то кажуть, що на множині W задано функцію *n* змінних із значеннями у множині U. $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ – незалежні змінні (аргументи), u - залежна змінна (функція). W - область визначення функції $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \in W$, U – область значень.	*Позначення:* $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ або $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \in W$. *Приклад.* $u = {x_1}^2 + {x_2}^2 + ... + {x_n}^2$. $D(u) = R_n$, $E(u) = \left[0; +\infty\right)$.
Якщо $n = 2$, то маємо функцію двох змінних. Її область визначення $W \subset R_2$. Графік функції двох змінних – множина точок у просторі R_3. Лінія із області визначення функції двох змінних і вздовж якої функція $z = f(x, y)$ залишається сталою, називається лінією рівня цієї функції.	*Позначення:* $u = f(x_1, x_2)$ або $z = f(x, y)$. Рівняння лінії рівня $f(x, y) = c$, де c – стала, $(x, y) \in D(f)$.
Якщо $n = 3$, то маємо функцію трьох змінних. Її область визначення $W \subset R_3$. Графік функції трьох змінних – множина точок у просторі R_4. Поверхня із області визначення функції трьох змінних і вздовж якої функція $u = f(x, y, z)$ залишається сталою, називається поверхнею рівня цієї функції.	*Позначення:* $u = f(x_1, x_2, x_3)$ або $u = f(x, y, z)$. Рівняння лінії рівня $f(x, y, z) = c$, де c – стала, $(x, y, z) \in D(f)$.

Навчальні завдання

✍ <u>Приклад 1</u>. Запишіть і зобразіть область визначення заданих функцій: а) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 3)$; б) $f(x, y) = \sqrt[6]{x^2 - y^2 - 3}$; в) $f(x, y) = \arcsin\dfrac{x + 2y}{2}$.

○ Пропоновані функції є функціями двох змінних. Тому їхні області визначення – це певні підмножини простору R_2.

а) $x^2 + y^2 - 3 > 0$, оскільки логарифмічна функція визначена лише для додатного значення аргумента (як функція дійсних змінних). Нерівність $x^2 + y^2 - 3 > 0$ можна переписати як $x^2 + y^2 > 3$. На координатній площині – це частина площини, що знаходиться поза колом $x^2 + y^2 = 3$ (рис.1.1).

б) Оскільки корінь парного степеня існує лише з невід'ємних чисел (на множині дійсних чисел), то $x^2 - y^2 - 3 \ge 0$ або $x^2 - y^2 \ge 3$. Для побудови цієї множини точок треба побудувати гіперболу $\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{y^2}{3} = 1$ і вибрати ту (чи ті) частину площини, де виконується умова $x^2 - y^2 \ge 3$ (рис. 1.2).

в) Область визначення функції $f(x,y)=\arcsin\frac{x+2y}{2}$ визначена подвійною нерівністю: $-1\le\frac{x+2y}{2}\le 1$, яка рівносильна системі двох нерівностей $\begin{cases} x+2y\le 2, \\ x+2y\ge -2. \end{cases}$ Для зображення області визначення побудуємо дві прямі $x+2y=2,\ x+2y=-2$ і вибрати частину площину, що міститься між ними (рис. 1.3).

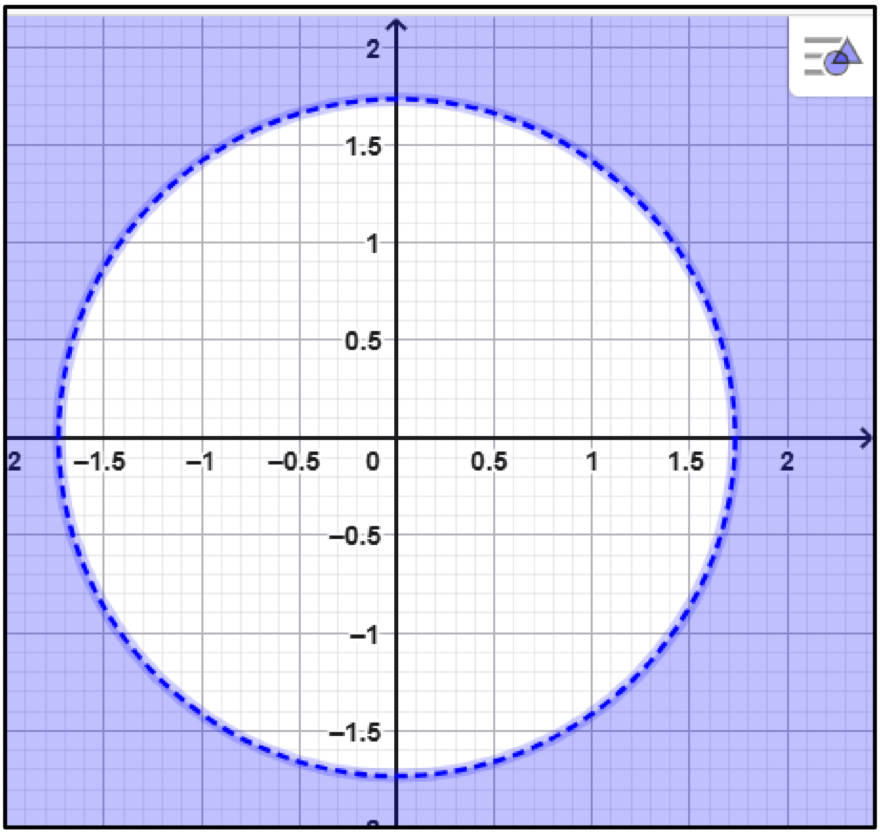


Рис. 1.1. Область визначення функції $f(x,y)=\ln(x^2+y^2-3)$

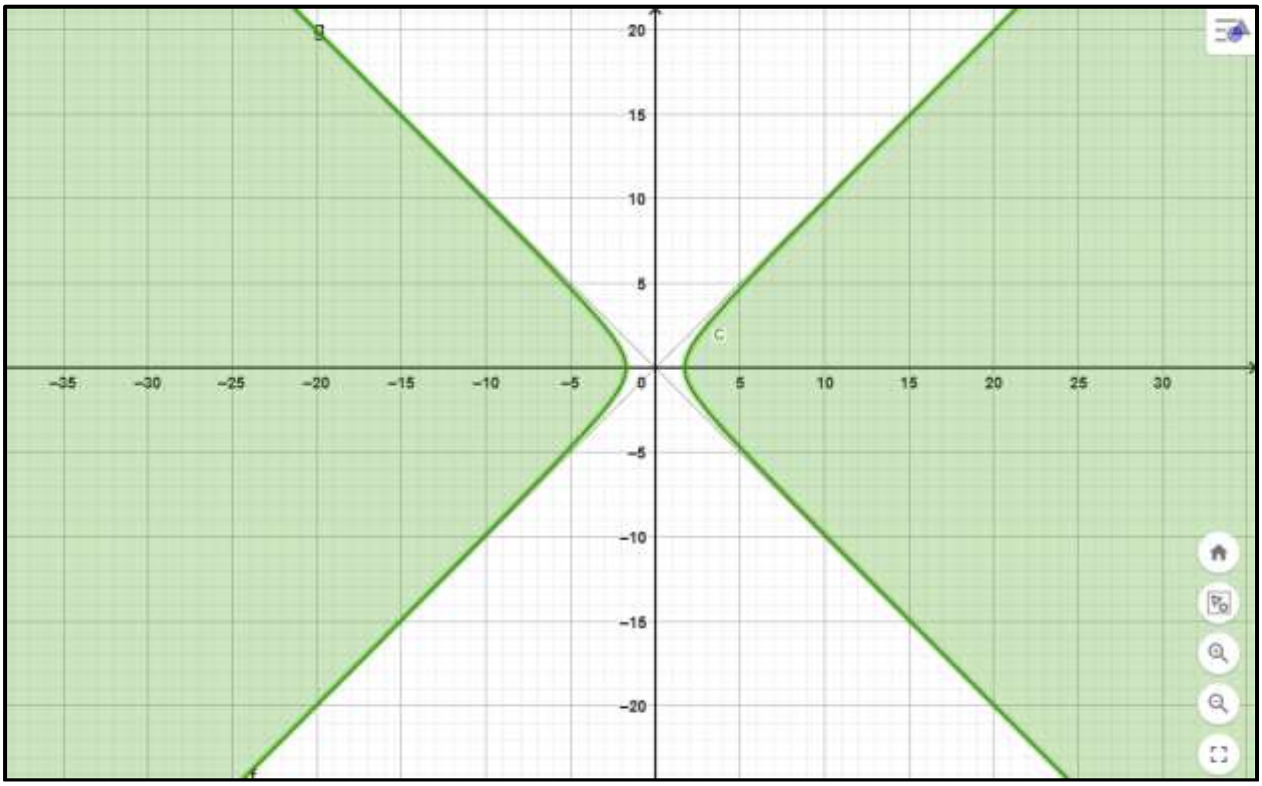


Рис. 1.2. Область визначення функції $f(x,y)=\sqrt[6]{x^2-y^2-3}$

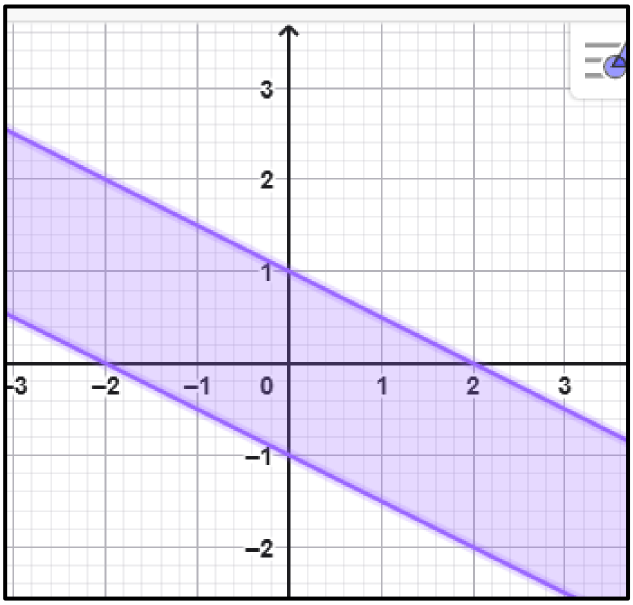


Рис. 1.3. Область визначення функції $f(x,y) = \arcsin\dfrac{x+2y}{2}$

✍ <u>Приклад 2</u>. Запишіть рівняння ліній рівня заданих функцій і знайдіть ту, яка проходить через задану точку: а) $g(x,y) = x^2 + y^2$, $A(-1;2)$; б) $h(x,y) = xy$, $A(-2;1)$.

○ а) Рівняння лінії рівня має вигляд: $f(x,y) = c,$ де c – стала. Отже, $x^2 + y^2 = c$, де $c \geq 0$. Для $c = 0$ лінія рівня – точка (0; 0), для $c > 0$ – концентричні кола з центром у початку координат і радіуса $\sqrt{c}$. Щоб знайти саме ту лінію рівня, якій належить задана точка, підставимо координати заданої точки в рівняння ліній рівня: $(-1)^2 + 2^2 = c$, тоді $c = 5$ і шукана лінія рівня має рівняння $x^2 + y^2 = 5$.

б) Аналогічно, $xy = c$. Якщо $c = 0$, то маємо дві прямі $x = 0$ або $y = 0$. Якщо $c \neq 0$, то лінії рівня – гіперболи $y = \dfrac{c}{x}$. Якщо лінія рівня проходить через точку $A(-2;1)$, то $-2 \cdot 1 = c$, тоді $xy = -2$ – рівняння шуканої лінії рівня.

➢ Для побудови ліній рівня функції $z = f\left(x,y\right)$ доцільно використовувати метод динамічного перерізу поверхні січною площиною *z* = *k*. Змінюючи параметр *k*, ми спостерігаємо, як змінюється геометричне місце точок перетину. Проєкція цього перерізу на площину *XOY* і є шуканою лінією рівня (див. Додаток Г).

✍ <u>Приклад 3</u>. Назвіть і побудуйте графіки заданих функцій: а) $z = 2x - y - 2$; б) $z = x^2 + y^2 + 2$.

○ а) Перепишемо рівняння $z = 2x - y - 2$ як $2x - y - z = 2$. Маємо рівняння площини. Запишемо його як рівняння площини у відрізках на осях (поділимо почленно рівняння на 2) $\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{-2} + \dfrac{z}{-2} = 1$ і побудуємо площину (рис. 1.4).

б) $z = x^2 + y^2 + 2$ – рівняння параболоїда з вершиною в точці (0; 0; 2). Отже, графіком заданої функції є параболоїд (рис. 1.5).

✍ <u>Приклад 4</u>. Запишіть і охарактеризуйте область визначення заданих функцій: а) $f(x,y,z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$; б) $h(x,y,z) = \dfrac{xyz}{\ln(x^2 + y^2 + z^2)}$.

○ а) Область визначення функції $f(x,y,z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$ визначається системою трьох нерівностей: $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ z \geq 0. \end{cases}$

Це перший октант.

б) Функція $h(x,y,z) = \dfrac{xyz}{\ln(x^2 + y^2 + z^2)}$ визначена, якщо вираз під знаком логарифма додатній і знаменник не дорівнює нулю, тобто $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 > 0, \\ \ln(x^2 + y^2 + z^2) \neq 0. \end{cases}$ Перша нерівність виконується для будь-яких значень незалежних змінних, крім одного випадку – точки $O(0; 0; 0)$. Друга нерівність рівносильна такій: $x^2+y^2+z^2 \neq 1$. Отже, область визначення функції $h(x,y,z)=\dfrac{xyz}{\ln(x^2+y^2+z^2)}$ є множина точок простору R_3, крім сфери $x^2+y^2+z^2=1$ і точки $O(0; 0; 0)$.

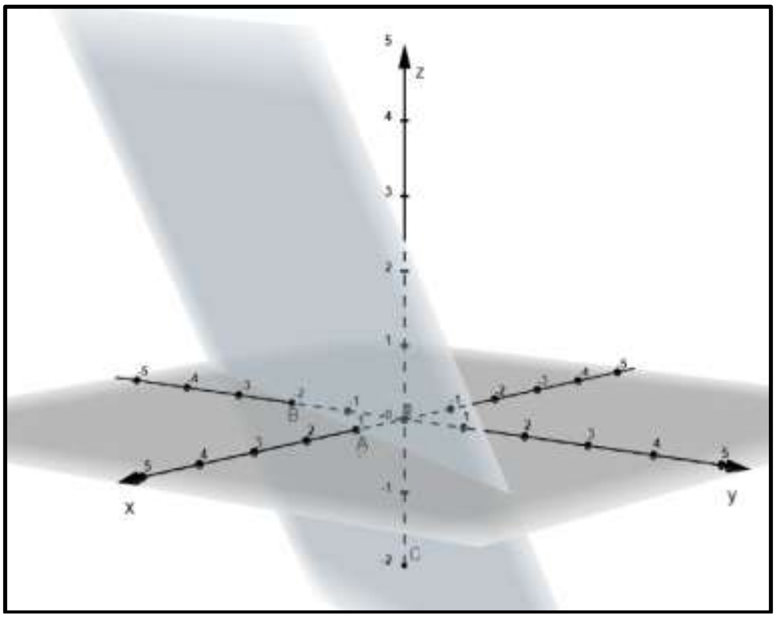


Рис. 1.4. Графік функції $z=2x-y-2$

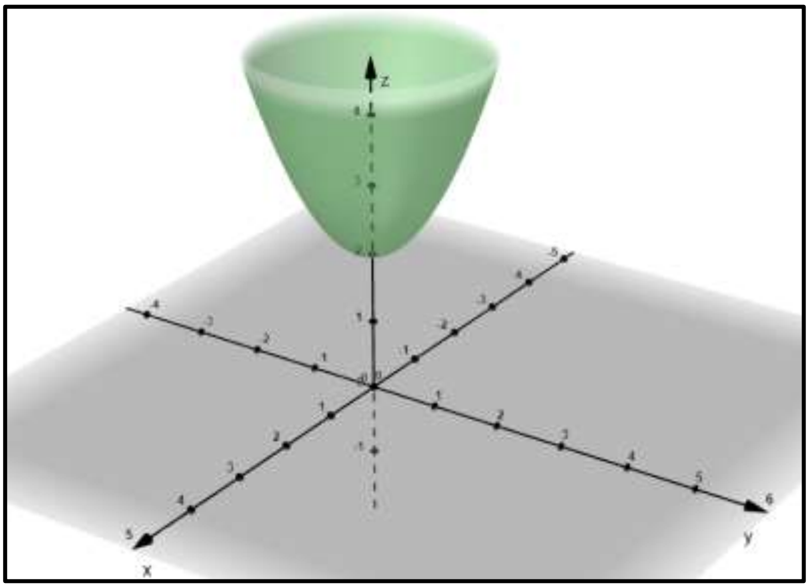


Рис. 1.5. Графік функції $z=x^2+y^2+2$

Завдання для аудиторної роботи

✍ 1. Знайдіть значення заданих функцій у вказаній точці: а) $f(x,y)=e^{y^2-x}$, $A(1;\sqrt{2})$; б) $f(x,y)=\ln\cos(y-x)$, $A(a;a)$.

✍ 2. Запишіть і зобразіть область визначення заданих функцій: а) $f(x,y)=\ln(y-x)$; б) $f(x,y)=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}}$; в) $f(x,y)=x\arccos\dfrac{y}{2}$.

✍ 3. Запишіть і охарактеризуйте область визначення заданих функцій: а) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-9}}$; б) $h(x,y,z)=z\arcsin(x-y)$.

✍ 4. Запишіть рівняння ліній рівня заданих функцій і знайдіть ту, яка проходить через задану точку: а) $g(x,y)=5-x^2-y$, $A(0;-2)$; б) $h(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-9}$, $A(3;-3)$. Побудуйте знайдені лінії.

✍ 5. Запишіть рівняння поверхонь рівня заданих функцій і знайдіть ту, яка проходить через задану точку: а) $g(x,y,z)=25-x^2-y^2-z^2$, $A(0;2;-1)$; б) $h(x,y,z)=z\sqrt{x^2-y^2-9}$, $A(4;1;4)$.

✍ 6. Назвіть і побудуйте графіки заданих функцій: а) $z=2x+2y-4$; б) $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Завдання для самостійної роботи

✍ 1. Запишіть і зобразіть область визначення заданих функцій: а) $f(x,y)=\ln(y+x-5)$; б) $f(x,y)=\sqrt{1-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}}$; в) $f(x,y)=x\arccos(y-x)$.

✍ 2. Запишіть і охарактеризуйте область визначення заданих функцій: а) $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}}$; б) $h(x,y,z)=\frac{\ln(x+y)}{z^2+4}$.

✍ 3. Запишіть рівняння ліній рівня заданих функцій і знайдіть ту, яка проходить через задану точку: а) $g(x,y)=1+4x^3-y$, $A(1;2)$; б) $h(x,y)=x^2(x+y^2-9)$, $A(-1;3)$.

✍ 4. Запишіть рівняння поверхонь рівня заданих функцій і знайдіть ту, яка проходить через задану точку: а) $g(x,y,z)=7-x-y-z$, $A(0;2;-1)$; б) $h(x,y,z)=z^3\sqrt{x^2+y^2-16}$, $A(4;1;4)$.

✍ 5. Назвіть і побудуйте графіки заданих функцій: а) $z=3-x-y$; б) $z=2+\sqrt{x^2+y^2}$.

Додаткові завдання

1. Виразіть площу трикутника S як функцію довжин трьох його сторін a, b, c. Знайдіть область визначення цієї функції.

2. Виразіть об'єм конуса V як функцію двох його вимірів – радіуса основи R і висоти H. Знайдіть область визначення цієї функції.

3. Знайдіть і зобразіть область визначення заданих функцій: а) $z=\arcsin\frac{y-1}{x}$; б) $z=\sqrt{y\cos x}$; в) $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-b^2}}$, $a>b>0$.

4. Запишіть рівняння ліній рівня і побудуйте кілька таких ліній для функції $z=\frac{y}{x^2+1}$.

5. Температура T (у градусах Цельсія) металевої пластини в кожній її точці (x, y) задається функцією: $T(x,y)=100-x^2-2y^2$. а) Побудуйте лінії рівня (ізотерми) для значень температури T = 20^{0}С, T = 50^{0}С, Т = 82^{0}С. б) Охарактеризуйте форму цих ліній (до якого типу кривих другого порядку вони належать). в) Знайдіть точку, у якій температура пластини є максимальною, та вкажіть це значення. г) Визначте, чи проходить лінія рівня T = 82^{0}С через точку A(4; 1).

Відповіді. Завдання для аудиторної роботи. 1. а) e; б) 1. **2.** а) $y>x$; б) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1$; в) $-2\le y\le 2, x\in R$. **3.** а) $x^2+y^2+z^2-9>0$; б) $-1\le x-y\le 1$. **4.** а) $y=-x^2-2$; б) $x^2+y^2=18$. **5.** а) $x^2+y^2+z^2=5$; б) $z\sqrt{x^2-y^2-9}=4\sqrt{6}$.

Завдання для самостійної роботи. 1. а) $y>-x+5$; б) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}\le 1$; в) $-1\le y-x\le 1$. **2.** а) $x^2+y^2+z^2<4$; б) $y>-x,\ z\in R$. **3.** а) $y=4x^3-2$; б) $x^2(x+y^2-9)=-1$. **4.** а) $x+y+z=1$; б) $z^3\sqrt{x^2+y^2-16}=64$.

Додаткові завдання. 3. а) *Вказівка.* Розгляньте два випадки: $x>0$, $x<0$; б) *Вказівка.* Розв'яжіть графічно сукупність двох систем: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y\ge 0,\\ \cos x\ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases} y\le 0,\\ \cos x\le 0.\end{cases}\end{array}\right.$

5. а) $x^2+2y^2=80$, $x^2+2y^2=50$, $x^2+2y^2=18$; б) еліпси; в) $T(0;0)=100^0C$; г) належить.

ТЕМА 2. ГРАНИЦЯ І НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Теоретичні питання

1. Поняття границі функції двох змінних в точці. Властивості функцій, що мають границю в точці.
2. Поняття неперервності функції двох змінних в точці і в області.
3. Властивості неперервних функцій двох змінних.

Література:

1. Шкіль М.І. Математичний аналіз: Підручник. У 2-х ч. Ч.2. 3-є видання, переробл. і доп. Київ: Вища школа. 2005. 510 с. С. 73-181. Режим доступу: https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Shkil_P2_2005_510.pdf
2. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: Підручник: У 2-х ч. Ч. 2. Київ: Либідь. 2003. 304 с. С. 50-73. Режим доступу: https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Dorogovtsev_P2_1994_304.pdf
3. Lebl J. Basic Analysis II: Introduction to Real Analysis, Volume II. Oklahoma: Jiří Lebl / University of Oklahoma. 2024. 244 p. P. 131–190. Режим доступу: https://www.jirka.org/ra/realanal2.pdf

Повторити: 1. Прийоми обчислення границі функції однієї змінної.
2. Перша й друга важливі границі.
3. Неперервність функції однієї змінної в точці і на інтервалі.

Основні теоретичні відомості

Нехай точка (x_0, y_0) є граничною точкою області визначення функції $z = f(x,y)$, (x,y) – довільна точка із $D(f)$. Число A називають *границею функції* $z = f(x,y)$ *в точці* (x_0, y_0), якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існують додатні числа δ_1, δ_2 такі, що як тільки виконуються нерівності $0 < \lvert x - x_0\rvert < \delta_1, 0 < \lvert y - y_0\rvert < \delta_2$, то й виконується нерівність $\lvert f(x,y) - A\rvert < \varepsilon$.	*Позначення*: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$ або $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\, \exists\delta_1(\varepsilon) > 0\, \exists\delta_2(\varepsilon) > 0$ $(\forall(x,y): 0 < \lvert x - x_0\rvert < \delta_1(\varepsilon), 0 < \lvert y - y_0\rvert < \delta_2(\varepsilon)$ $\Rightarrow \lvert f(x,y) - A\rvert < \varepsilon)$
Для функції двох змінних виконуються теореми про границю суми, добутку та частки, які аналогічні до відповідних теорем для функції однієї незалежної змінної, зокрема: 1. Якщо функція $z = f(x,y)$ має границю в точці (x_0, y_0), то ця границя єдина. 2. Якщо $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y) = B$ і в деякому околі точки (x_0, y_0) $f(x,y) < g(x,y)$, то $A \le B$.	Нехай $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y) = B$. Тоді: 1. $\forall c \in R \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} cf(x,y) = cA$ 2. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \left(f(x,y) + g(x,y)\right) = A + B$ 3. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \left(f(x,y) - g(x,y)\right) = A - B$ 4. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \left(f(x,y) \cdot g(x,y)\right) = A \cdot B$ 5. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \left(\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}\right) = \dfrac{A}{B}, g(x,y) \ne 0, B \ne 0$
Функція $z = f(x,y)$ називається неперервною в точці (x_0, y_0), якщо $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0)$. Функція $z = f(x,y)$ називається неперервною в області *D*, якщо неперервна в кожній точці цієї області.	Щоб показати, що функція $z = f(x,y)$ є неперервною в точці (x_0, y_0), треба перевірити три умови: 1) $\exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A \in R$; 2) $\exists f(x_0, y_0) = B$; 3) $A = B$.
Повним приростом функції $z = f(x,y)$ в точці (x_0, y_0) називається різниця $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$.	*Позначення*: $\Delta f(x_0, y_0)$ $\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$.
Частинним приростом функції $z = f(x,y)$ в точці (x_0, y_0) за змінною x називається різниця $f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$.	*Позначення*: $\Delta_x f(x_0, y_0)$ $\Delta_x f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$.

Частинним приростом функції $z = f(x,y)$ в точці (x_0, y_0) за змінною y називається різниця $f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$.	*Позначення*: $\Delta_y f(x_0, y_0)$ $\Delta_y f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$.
Функція $z = f(x,y)$ називається неперервною в точці (x_0, y_0), якщо $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta f(x_0, y_0) = 0$.	
Для функції двох змінних виконуються властивості неперервних функцій, які аналогічні до відповідних теорем для функції однієї незалежної змінної, зокрема: 1. Нехай функції $z = f(x,y)$ і $z = g(x,y)$ неперервні в точці (x_0, y_0). Тоді їхня сума, різниця, добуток й частка ($g(x_0, y_0) \neq 0$) неперервні в точці (x_0, y_0). 2. Якщо функція $z = f(x,y)$ неперервна в замкненій обмеженій області $D \subset R_2$, то функція обмежена в цій області. 3. Якщо функція $z = f(x,y)$ неперервна в замкненій обмеженій області $D \subset R_2$, то серед множини її значень є найбільше й найменше значення.	

Навчальні завдання

✍ Приклад 1. Обчисліть: а) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \dfrac{x^2+y^3}{3x-y}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ y\to -1}} \dfrac{x^2-y^2}{x-y}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$; г) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(2x^2y)}{xy}$; ґ) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2}$; д) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(1+x^3y^3\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$.

○ а) Враховуючи арифметичні властивості границі функції в точці, маємо: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \dfrac{x^2+y^3}{3x-y} = \dfrac{1^2+2^3}{3\cdot 1-2} = \dfrac{9}{1} = 9$.

б) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ y\to -1}} \dfrac{x^2-y^2}{x-y} = \left[\dfrac{(-1)^2-(-1)^2}{-1-(-1)}\right] = \left[\dfrac{0}{0}\right]$. Отримали невизначеність. Один із шляхів розкриття такої невизначеності – розклад на множники. $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ y\to -1}} \dfrac{x^2-y^2}{x-y} = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ y\to -1}} \dfrac{(x-y)(x+y)}{x-y} \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ y\to -1}} (x+y) = -1+(-1) = -2$.

в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$. Помножимо і поділимо функцію на вираз, спряжений до виразу, що в знаменнику.

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+4}+2)}{(\sqrt{x^2+y^2+4}-2)(\sqrt{x^2+y^2+4}+2)} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+4}+2)}{x^2+y^2+4-4} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (\sqrt{x^2+y^2+4}+2) = 4.$$

г) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(2x^2y)}{xy} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$. Перепишемо функцію у вигляді $\dfrac{\sin(2x^2y)}{xy} = \dfrac{\sin(2x^2y)}{2x^2y}\cdot 2x$ і врахуємо, що $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(2x^2y)}{2x^2y} = 0$ (поясніть, чому так). Тоді $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(2x^2y)}{xy} = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}} \left(\dfrac{\sin(2x^2y)}{2x^2y}\cdot 2x\right) = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}} \left(\dfrac{\sin(2x^2y)}{2x^2y}\right) \cdot \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}} (2x) = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$.

ґ) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$. *1-ий спосіб.* Оскільки $x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2 \geq 0$, то $x^2+y^2 \geq -2xy$. Тоді $0 \leq \left|\dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\dfrac{x^3y^3}{-2xy}\right| = \dfrac{1}{2}x^2y^2$. Оскільки $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} 0 = 0$ і $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\dfrac{1}{2}x^2y^2\right) = 0$, то й $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2} = 0$. *2-ий спосіб.* Перейдемо до полярної системи координат: $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$. Тоді $x^2+y^2 = \rho^2$. Оскільки за умовою $x \to 0, y \to 0$, то й $\rho \to 0$, а $\varphi \in [0; 2\pi]$. Тоді $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{\rho^3\cos^3\varphi\cdot\rho^3\sin^3\varphi}{\rho^2} = \lim\limits_{\rho\to 0} \rho^4\cos^3\varphi\sin^3\varphi = 0$ (як добуток нескінченно малої функції на обмежену).

д) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(1+x^3y^3\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = \left[1^\infty\right]$. Невизначеності такого вигляду розкриваються за допомогою другої важливої границі. Тому перепишемо функцію і границю $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(1+x^3y^3\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(1+x^3y^3\right)^{\frac{1}{x^3y^3}\cdot x^3y^3\cdot\frac{1}{x^2+y^2}}$ і врахуємо, що

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(1+x^3y^3\right)^{\frac{1}{x^3y^3}}=e$ (поясніть, чому так). Тоді $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(1+x^3y^3\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(1+x^3y^3\right)^{\frac{1}{x^3y^3}\cdot x^3y^3\cdot\frac{1}{x^2+y^2}}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3y^3}{x^2+y^2}}=e^0=1$ (тут враховано результат попереднього прикладу).

✍ <u>Приклад 2</u>. Дослідіть, чи має функція $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ границю в точці (0; 0). Якщо має, то знайдіть її.

○ Прямування точки (x,y) до точки (0; 0) може відбуватися з різних напрямків. Розглянемо два з них. а) Нехай прямування відбувається по осі абсцис. Тоді точка (x,y) має вигляд $(x,0)$ і $x\to 0$. Тоді $f(x,0)=\dfrac{x\cdot 0}{x^2+0^2}=0$ і $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}0=0$; б) Нехай прямування відбувається по прямій $y = x$. Тоді точка (x,y) має вигляд (x,x) і $x\to 0$. Тоді $f(x,x)=\dfrac{x\cdot x}{x^2+x^2}=\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$ і $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$. Оскільки $0\neq\dfrac{1}{2}$, то не існує $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$. На рис. 2.1 побудовано графік функції $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, на якому видно, що при наближенні до точки (0,0) вздовж різних прямих значення функції прямують до різних рівнів висоти. Так, якщо прямування відбувається вздовж прямої $y = x$, то отримаємо найвищу точку поверхні («гребінь») на висоті 0,5. Якщо ж прямування відбувається вздовж прямої $y=-x$, то отримаємо найнижчу точку поверхні («жолоб») на висоті $-0{,}5$. Це наочно підтверджує висновок про те, що границя залежить від шляху наближення. А це й означає, що не існує $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

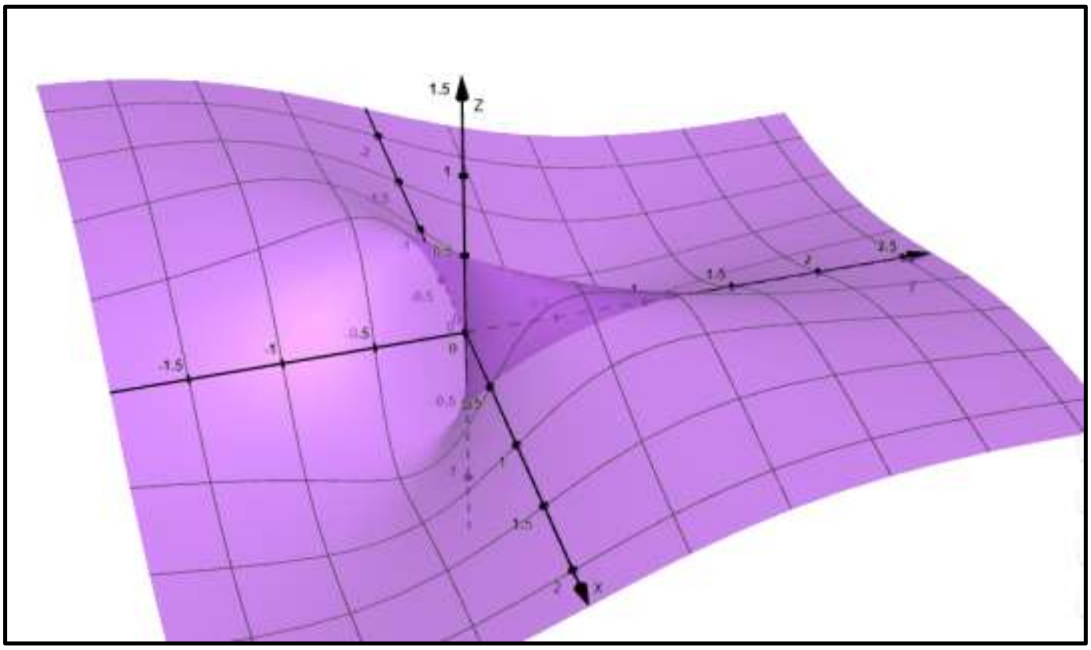


Рис. 2.1. Графік функції $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

✍ <u>Приклад 3.</u> Дослідіть функцію $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ на неперервність в точці $M_1(1;2)$.

○ Перевіримо виконання трьох умов: 1) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\dfrac{1\cdot 2}{1^2+2^2}=\dfrac{2}{5}$; 2) $f(1;2)=\dfrac{1\cdot 2}{1^2+2^2}=\dfrac{2}{5}$; 3) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=f(1;2)$. Отже, функція неперервна в заданій точці.

✍ Приклад 4. Дослідіть функцію $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0;0),\\ 0,\ (x,y)=(0;0)\end{cases}$ на неперервність в точці $M_1(0;0)$.

○Оскільки не існує границі $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ (див. Приклад 2), то точка (0; 0) є точкою розриву заданої функції.

✍ Приклад 5. Доведіть, що функція $f(x,y)=x^2+y^2$ є неперервною на R_2.

○Розглянемо довільну точку (x_0,y_0) і доведемо, що функція неперервна в цій точці. Запишемо повний приріст функції в точці (x_0,y_0): $\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=(x_0+\Delta x)^2+(y_0+\Delta y)^2-(x_0{}^2+y_0{}^2)$. Після спрощення маємо: $\Delta f(x_0,y_0)=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2+2y_0\Delta y+(\Delta y)^2$. Обчислимо $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\Delta f(x_0,y_0)=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\left(2x_0\Delta x+(\Delta x)^2+2y_0\Delta y+(\Delta y)^2\right)=0$. Отже, функція $f(x,y)=x^2+y^2$ є неперервною в точці (x_0,y_0). Оскільки точка (x_0,y_0) – довільна, то функція $f(x,y)=x^2+y^2$ є неперервною на R_2.

✍ Приклад 6. Чи можна довизначити функцію $f(x,y)=\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ в точці (0; 0) так, щоб функція була неперервна в цій точці?

○Задана функція в точці (0; 0) не визначена. З'ясуємо, чи існує $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$. Використовуючи першу важливу границю, маємо: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=1$. Отже, для того, щоб довизначена функція була неперервною в точці (0; 0), треба, щоб її значення в точці (0; 0) було рівне 1. Довизначена функція має вигляд $\tilde f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0;0),\\ 1,\ (x,y)=(0;0).\end{cases}$ Графік цієї функції зображений на рис. 2.2. Поясніть, чим цей графік буде відрізнятися від графіка функції $f(x,y)=\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

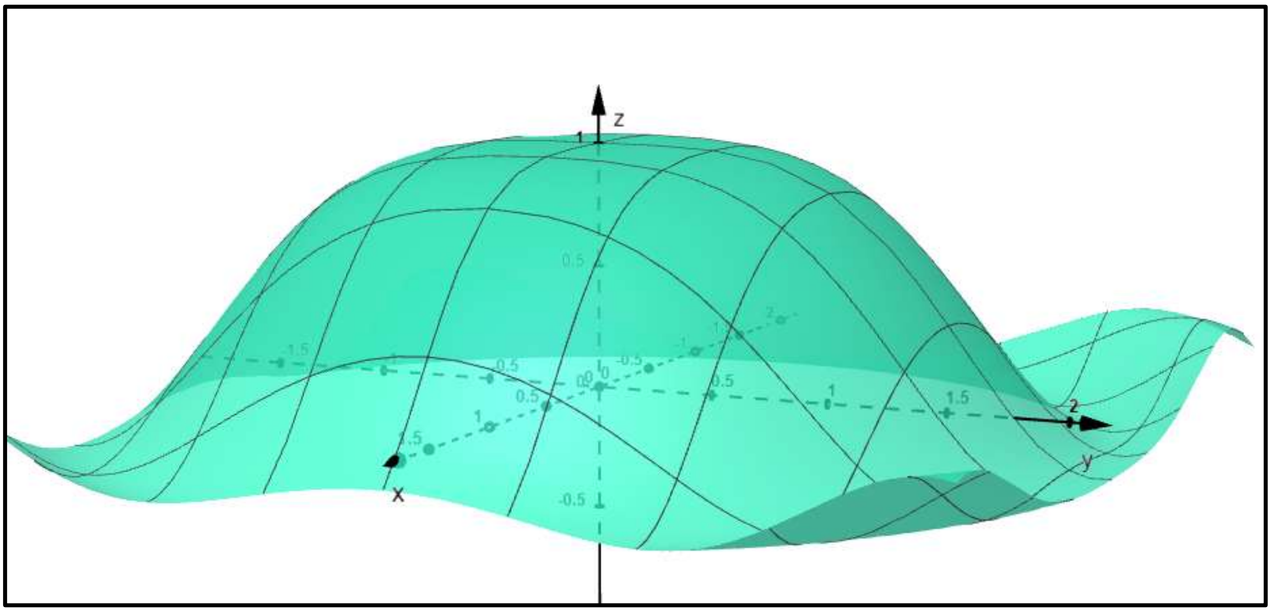


Рис. 2.2. Графік функції $\tilde f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0;0),\\ 1,\ (x,y)=(0;0).\end{cases}$

✎ Приклад 7. Чи можна довизначити функцію $f(x,y)=\dfrac{\sin(x^3y^3)}{x^2+y^2}$ в точці (0; 0) так, щоб функція була неперервна в цій точці?

○З'ясуємо, чи існує $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin(x^3y^3)}{x^2+y^2}$. Враховуючи розв'язання і результати прикладів 1.г) і 1. ґ), маємо: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin(x^3y^3)}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin(x^3y^3)\cdot x^3y^3}{x^3y^3\cdot\left(x^2+y^2\right)}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin(x^3y^3)}{x^3y^3}\cdot\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^3y^3}{\left(x^2+y^2\right)}=1\cdot0=0$. Отже, для того, щоб довизначена функція була неперервною в точці (0; 0), треба, щоб її значення в точці (0; 0) було рівне 0. Довизначена функція має вигляд $\tilde f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^3y^3)}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0;0),\\ 0,\ (x,y)=(0;0).\end{cases}$ (графік зображено на рис. 2.3). Поясніть, чим цей графік відрізнятиметься від графіка функції $f(x,y)=\dfrac{\sin(x^3y^3)}{x^2+y^2}$.

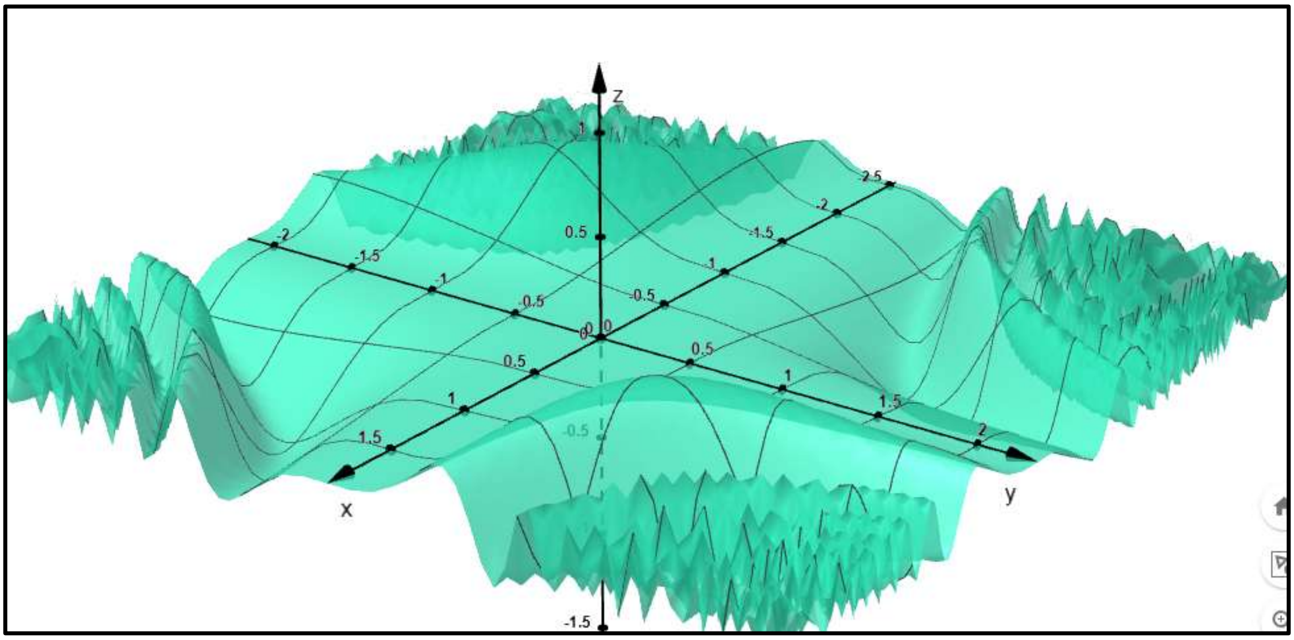


Рис. 2.3. Графік функції $\tilde f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^3y^3)}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0;0),\\ 0,\ (x,y)=(0;0).\end{cases}$

✎ Приклад 8. Чи існує $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\sin\left(\dfrac{5}{x^2+y^2}\right)$?

○Оскільки $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left(\dfrac{5}{x^2+y^2}\right)=\infty$, а границі $\lim\limits_{t\to\infty}\sin t$ не існує, то й не існує $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\sin\left(\dfrac{5}{x^2+y^2}\right)$. Графік функції $f(x,y)=\sin\left(\dfrac{5}{x^2+y^2}\right)$ зображений на рис. 2.4. При наближенні до точки (0; 0) графік схожий на поверхню води, куди кинули камінь.

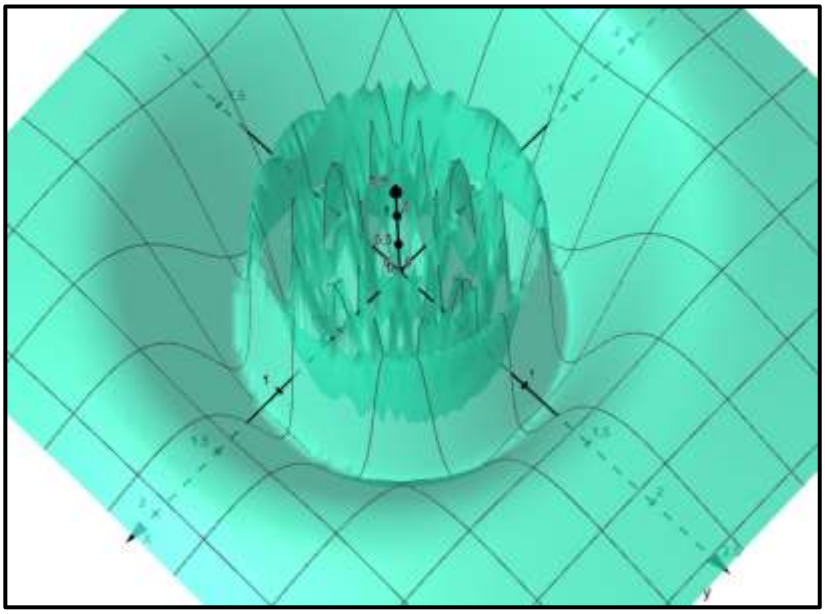


Рис. 2.5. Графік функції $f(x,y)=\sin\left(\dfrac{5}{x^2+y^2}\right)$

Завдання для аудиторної роботи

✍ 1. Обчисліть: а) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ y\to 1}}\dfrac{2x^3+4y^2}{x^5-3y^4}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2+9}-3}{x^2+y^2}$; г) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to -1}}\dfrac{tg(x^2y)}{x^2y^3}$; г) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^3}{x^2+y^2}$; д) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(1+xy^3\right)^{\frac{3}{x^2+y^2}}$.

✍ 2. Дослідіть, чи має функція $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ границю в точці (0; 0). Якщо має, то знайдіть її.

✍ 3. Дослідіть функцію $f(x,y)=\dfrac{e^{xy}}{x^2+y^2+4}$ на неперервність в точці $M_1(0;-2)$.

✍ 4. Дослідіть функцію $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0;0),\\ 2,\ (x,y)=(0;0)\end{cases}$ на неперервність в точці $M_1(0;0)$.

✍ 5. Доведіть, що функція $f(x,y)=2x^2-y^2$ є неперервною на R_2.

✍ 6. Чи можна довизначити функцію $f(x,y)=\dfrac{\sin(5x^2y^2)}{x^2+y^2}$ в точці (0; 0) так, щоб функція була неперервна в цій точці? У випадку позитивної відповіді запишіть довизначену функцію.

Завдання для самостійної роботи

✍ 1. Обчисліть: а) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to -3}}\dfrac{2x^3-4y^2+7}{x^2-3y+3}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ y\to 2}}\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x+y}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2+16}-4}{x^2+y^2}$; г) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to -1}}\dfrac{tg(xy^2)}{xy^3}$; г) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2}$; д) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(1+x^2y^3\right)^{-\frac{8}{x^2+y^2}}$.

✍ 2. Дослідіть, чи має функція $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ границю в точці (0; 0). Якщо має, то знайдіть її.

✍ 3. Дослідіть функцію $f(x,y)=\dfrac{\ln(1+xy^2)}{10x^2+y^2+9}$ на неперервність в точці $M_1(0;3)$.

✍ 4. Дослідіть функцію $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0;0),\\ -2,\ (x,y)=(0;0)\end{cases}$ на неперервність в точці $M_1(0;0)$.

✍ 5. Доведіть, що функція $f(x,y)=2x^2+3y^2$ є неперервною на R_2.

✍ 6. Чи можна довизначити функцію $f(x,y)=\dfrac{\sin(3xy^2)}{x^2+y^2}$ в точці (0; 0) так, щоб функція була неперервна в цій точці? У випадку позитивної відповіді запишіть довизначену функцію.

Додаткові завдання

1. Обчисліть: а) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\ln(1+x^4+y^4)}{\sqrt{x^4+y^4+9}-3}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\arcsin(x^4+y^4)}{\sqrt{x^4+y^4+9}-3}$.
2. Дослідіть, чи існують вказані границі: а) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x-y}{|x|+|y|}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$.
3. Нехай функція $H(x, y)$ описує *висоту* рельєфу місцевості в точці з координатами (x, y). Чи буде функція $H(x, y)$ неперервною для ділянки з плавним пагорбом? Наведіть приклади реальних об'єктів рельєфу, які можуть відповідати точкам або лініям розриву цієї функції.

Відповіді. Завдання для аудиторної роботи. 1. а) $-\dfrac{1}{2}$; б) 0; в) $\dfrac{1}{6}$; г) 1; г) 0; д) 1. **2.** Ні. *Вказівка:* розгляньте різні траєкторії, наприклад, $y=kx$ і $y=x^2$. **3**. Неперервна. **4.** Не є неперервною. **6**. Так, можна.

Завдання для самостійної роботи. 1. а) $-\dfrac{13}{16}$; б) 0; в) $\dfrac{1}{8}$; г) -1; г) 0; д) 1. **2.** Ні. *Вказівка:* розгляньте різні траєкторії, наприклад, $y=kx$ для різних значень k. **3**. Неперервна. **4.** Не є неперервною. **6**. Так, можна.

Додаткові завдання. 1. а) 4; б) 6; в) 6. **2.** Не існують. а) *Вказівка:* розгляньте різні траєкторії, наприклад, $y=kx$ і $y=x^3$.

ТЕМА 3. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ

Теоретичні питання

1. Поняття частинних похідних 1-го порядку.
2. Частинні похідні вищих порядків.

Література:

1. Шкіль М.І. Математичний аналіз: Підручник. У 2-х ч. Ч.2. 3-є видання, переробл. і доп. Київ: Вища школа. 2005. 510 с. С. 73-181. Режим доступу: https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Shkil_P2_2005_510.pdf
2. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: Підручник: У 2-х ч. Ч. 2. Київ: Либідь. 2003. 304 с. С. 50-73. Режим доступу: https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Dorogovtsev_P2_1994_304.pdf
3. Lebl J. Basic Analysis II: Introduction to Real Analysis, Volume II. Oklahoma: Jiří Lebl / University of Oklahoma. 2024. 244 p. P. 131–190. Режим доступу: https://www.jirka.org/ra/realanal2.pdf

Повторити: 1. Правила диференціювання.
2. Таблиця похідних елементарних функцій.
3. Повний приріст функції двох змінних, частинні прирости функції двох змінних.

Основні теоретичні відомості

Границю відношення частинного приросту функції $z=f(x,y)$ в точці (x_0,y_0) за змінною *x* до приросту Δx, якщо $\Delta x\to 0$, якщо така границя існує і є дійсним числом, називають *частинною похідною по змінній x* функції $z=f(x,y)$ в точці (x_0,y_0).	*Позначення:* $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}, f'_x(x_0,y_0)$ $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f(x_0,y_0)}{\Delta x}$
Границю відношення частинного приросту функції $z=f(x,y)$ в точці (x_0,y_0) за змінною *y* до приросту Δy, якщо $\Delta y\to 0$, якщо така границя існує і є дійсним числом, називають *частинною похідною по змінній y* функції $z=f(x,y)$ в точці (x_0,y_0).	*Позначення:* $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}, f'_y(x_0,y_0)$ $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y f(x_0,y_0)}{\Delta y}$
Диференціюючи функцію по змінній *x* вважаємо *y* сталою. І навпаки. Тому правила знаходження частинних похідних такі самі, що й правила диференціювання функції однієї змінної. $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ – частинні похідні першого порядку функції $z=f(x,y)$	
Якщо функції $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ мають частинні похідні, то їх називають *частинними похідними 2-го порядку* функції $z=f(x,y)$.	*Позначення:* $f''_{xx}(x,y)=\left(f'_x(x,y)\right)'_x$, $f''_{xy}(x,y)=\left(f'_x(x,y)\right)'_y$, $f''_{yx}(x,y)=\left(f'_y(x,y)\right)'_x$, $f''_{yy}(x,y)=\left(f'_y(x,y)\right)'_y$. $f''_{xx}(x,y)$, $f''_{yy}(x,y)$ – чисті частинні похідні, $f''_{xy}(x,y)$, $f''_{yx}(x,y)$ – мішані частинні похідні 2-го порядку функції $z=f(x,y)$.
Аналогічно означаються частинні похідні вищих порядків. Наприклад, $f'''_{xxy}(x,y)=(f''_{xx}(x,y))'_y$.	
Нехай для функції $z=f(x,y)$ виконуються умови: 1) $z=f(x,y)$ визначена в області $D\subset R_2$; 2) у цій області існують частинні похідні першого порядку $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ і мішані частинні похідні 2-го порядку $f''_{xy}(x,y)$ і $f''_{yx}(x,y)$; 3) мішані частинні похідні 2-го порядку $f''_{xy}(x,y)$ і $f''_{yx}(x,y)$ неперервні в точці $(x_0,y_0)\in D$. Тоді $f''_{xy}(x_0,y_0)$ = $f''_{yx}(x_0,y_0)$.	
Аналогічно означаються частинні похідні для функції *n* змінних.	

Навчальні завдання

✍ Приклад 1. Знайдіть частинні похідні першого порядку заданих функцій: а) $z=3x^2-4y^2+5$; б) $z=5x^2y^3+5xy-4x+3y-7$; в) $u=3x^2z-4y^2x^3+5z^4-3z+5$; г) $z=\dfrac{x}{y}$; ґ) $z=x^y$; д) $z=\dfrac{2x^2-3y^3}{x+y}$; е) $z=\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$; є) $z=\ln(x^2+y^2)$.

○ Для знаходження частинних похідних першого порядку по одній із змінних решту змінних вважаємо сталими. Правила знаходження правила знаходження частинних похідних 1-го порядку такі самі, що й правила диференціювання функції однієї змінної.

а) Оскільки функція $z=3x^2-4y^2+5$ є сумою, то знаходимо похідні кожного доданка, враховуючи попередні зауваження. Отже, $z'_x=3\cdot 2x-0+0=6x$; $z'_y=0-4\cdot 2y+0=-8y$.

б) Аналогічно до попереднього прикладу маємо: $z'_x=5\cdot 2x\cdot y^3+5\cdot 1\cdot y-4\cdot 1+0-0=10xy^3+5y-4$; $z'_y=5x^2\cdot 3y^2+5x\cdot 1-0+3\cdot 1-0=15x^2y^2+5x+3$.

в) Функція $u=3x^2z-4y^2x^3+5z^4-3z+5$ є функцією трьох незалежних змінних, тому має три частинні похідні 1-го порядку. $u'_x=3\cdot 2xz-4y^2\cdot 3x^2+0-0+0=6xz-12y^2x^2$; $u'_y=0-4\cdot 2yx^3+0-0+0=-8yx^3$; $u'_z=3x^2\cdot 1-0+5\cdot 4z^3-3\cdot 1+0=3x^2+20z^3-3$.

г) Перепишемо функцію $z=\dfrac{x}{y}$ у вигляді $z=x\cdot\dfrac{1}{y}$. Тоді $z'_x=1\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{y}$; $z'_y=x\cdot\left(-\dfrac{1}{y^2}\right)=-\dfrac{x}{y^2}$.

ґ) Якщо шукати частинну похідну по змінній *x* функції $z=x^y$, то *y* є сталою, тому це степенева функція: $z'_x=yx^{y-1}$. Якщо ж по змінній *y*, то сталою є змінна *x* і функція $z=x^y$ є показниковою: $z'_y=x^y\ln x$.

д) Функція $z=\dfrac{2x^2-3y^3}{x+y}$ є часткою, тому застосуємо правило диференціювання частки. Маємо:

$$z'_x=\frac{\left(2x^2-3y^3\right)'_x(x+y)-\left(2x^2-3y^3\right)(x+y)'_x}{(x+y)^2}=\frac{4x(x+y)-\left(2x^2-3y^3\right)\cdot 1}{(x+y)^2}=\frac{4x^2+4xy-2x^2+3y^3}{(x+y)^2}=\frac{2x^2+4xy+3y^3}{(x+y)^2};$$

$$z'_y=\frac{\left(2x^2-3y^3\right)'_y(x+y)-\left(2x^2-3y^3\right)(x+y)'_y}{(x+y)^2}=\frac{-9y^2(x+y)-\left(2x^2-3y^3\right)\cdot 1}{(x+y)^2}=\frac{-9xy^2-9y^3-2x^2+3y^3}{(x+y)^2}=\frac{-2x^2-9xy^2-6y^3}{(x+y)^2}$$

е) Функція $z=\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$ є складеною. Тоді $z'_x=\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)\cdot\left(\dfrac{x}{y}\right)'_x=\dfrac{1}{y}\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$; $z'_y=\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)\cdot\left(\dfrac{x}{y}\right)'_y=-\dfrac{x}{y^2}\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

є) Функція $z=\ln(x^2+y^2)$ – складена. $z'_x=\dfrac{1}{x^2+y^2}(x^2+y^2)'_x=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$; $z'_y=\dfrac{1}{x^2+y^2}(x^2+y^2)'_y=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$.

➢ Обчислення частинної похідної за змінною *x* геометрично означає розгляд перерізу поверхні площиною $y=y_0$. У цьому перерізі отримуємо плоску криву. Значення частинної похідної в точці – це тангенс кута нахилу дотичної до цієї кривої в обраній точці (рис.3.1). Детальніше – див. Додаток Г.

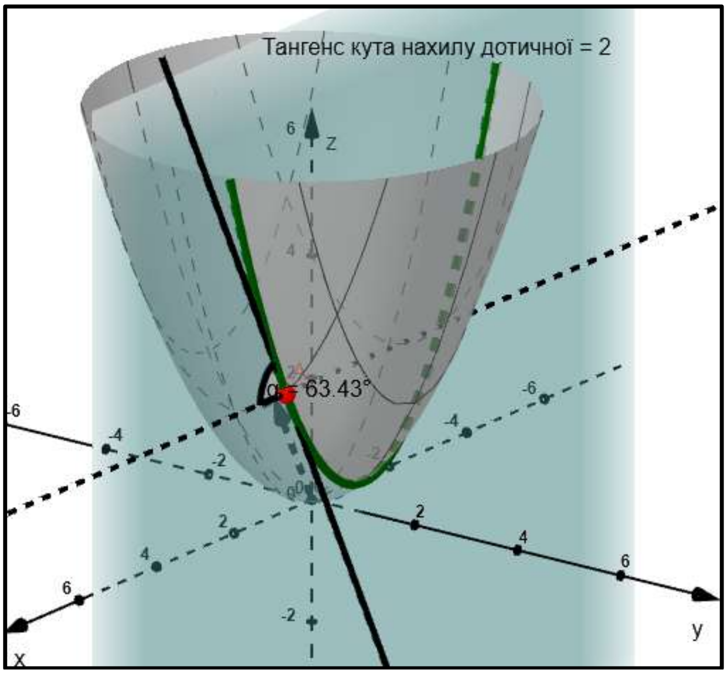


Рис. 3.1. Геометрична інтерпретація частинної похідної по змінній x функції двох змінних (тут – $f(x,\ y)=0.5(x^2+y^2)$)

✍ <u>Приклад 2</u>. Знайдіть частинні похідні другого порядку заданих функцій і переконайтеся, що $z''_{xy}=z''_{yx}$: а) $z=x^3-3xy^2+4y^5$; б) $z=e^y(\cos x+y\sin x)$; в) $z=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$; г) $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

○ Обчислимо частинні похідні 1-го порядку, тоді частинні похідні 2-го порядку і порівняємо z''_{xy} і z''_{yx}.

а) $z'_x=3x^2-3y^2$, $z'_y=-6xy+20y^4$. Тоді $z''_{xx}=\left(3x^2-3y^2\right)'_x=6x$, $z''_{xy}=\left(3x^2-3y^2\right)'_y=-6y$, $z''_{yx}=\left(-6xy+20y^4\right)'_x=-6y$, $z''_{yy}=\left(-6xy+20y^4\right)'_y=80y^3$. Як бачимо, $z''_{xy}=z''_{yx}=-6y$.

б) $z'_x=e^y(-\sin x+y\cos x)$; $z'_y=e^y(\cos x+y\sin x)+e^y\sin x=e^y(\cos x+y\sin x+\sin x)$ (тут маємо похідну добутку). Тепер обчислимо частинні похідні 2-го порядку. $z''_{xx}=e^y(-\cos x-y\sin x)$, $z''_{xy}=e^y(-\sin x+y\cos x)+e^y\cos x=e^y(-\sin x+y\cos x+\cos x)$ (тут маємо похідну добутку), $z''_{yx}=e^y(-\sin x+y\cos x+\cos x)$, $z''_{yy}=e^y(\cos x+y\sin x+\sin x)+e^y\sin x=e^y(\cos x+y\sin x+2\sin x)$ (аналогічно, похідна добутку). Маємо, що $z''_{xy}=z''_{yx}=e^y(-\sin x+y\cos x+\cos x)$.

в) Функція $z=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ є складеною. Тоді: $z'_x=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\dfrac{y}{x}\right)'_x=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$,

$z'_y=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\dfrac{y}{x}\right)'_y=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$. Частинні похідні 2-го порядку: $z''_{xx}=\left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)'_x=-y\cdot\dfrac{-(x^2+y^2)'_x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=$

$=\dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ (використано формулу $\left(\dfrac{c}{u}\right)'=-\dfrac{cu'}{u^2}$). $z''_{xy}=\left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)'_y=-\dfrac{1\cdot\left(x^2+y^2\right)-y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=-\dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$,

$z''_{yx}=\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)'_x=\dfrac{1\cdot\left(x^2+y^2\right)-x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $z''_{yy}=x\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)'_y=-\dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$. Передсвідчуємося, що $z''_{xy}=z''_{yx}=$

$=\dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$.

г) Функція $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$ складена, внутрішня функція $g(x,y)=x+\sqrt{x^2+y^2}$. Знайдемо частинні похідні 1-го порядку цієї функції: $g'_x(x,y)=1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $g'_y(x,y)=\dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Тоді $z'_x=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot g'_x(x,y)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\dfrac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_y=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot g'_y(x,y)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot$ $\cdot\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{y}{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2}$. Тоді частинні похідні 2-го порядку:

$$z''_{xx}=\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x=-\frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x}{x^2+y^2}=-\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=-\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$z''_{xy}=\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_y=-\frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_y}{x^2+y^2}=-\frac{\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=-\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$z''_{yx}=\left(\frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2}\right)'_x=-y\frac{1\cdot\sqrt{x^2+y^2}+x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}+2x}{\left(x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2\right)^2}=-\frac{y\left(2x^2+y^2+2x\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\left(x\sqrt{x^2+y^2}+\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2\right)^2\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$=-\frac{y\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2\sqrt{x^2+y^2}}=-\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$z''_{yy}=\left(\frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2}\right)'_y=\frac{1\cdot\left(x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2\right)-y\cdot\left(x\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}+2y\right)}{\left(x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2\right)^2}=$$

$$=\frac{x\left(x^2+y^2\right)+\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}-xy^2-2y^2\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}\left(x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^3+xy^2+\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}-xy^2-2y^2\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}\left(x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2\right)^2}=$$

$$=\frac{x^3+\left(x^2-y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}\left(x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2\right)^2}.$$

Як бачимо, $z''_{xy}=z''_{yx}=-\dfrac{y}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}}$.

✍ <u>Приклад 3</u>. Для заданих функцій обчисліть вказану частинну похідну у заданій точці: а) $z=3x^3y^4-6xy+3x$, z'''_{xxy}, $A(-1;2)$; б) $z=\ln(x-y)$, z'''_{xxx}, $A(3;2)$; в) $z=\cos(xy)$, z'''_{yxy}, $A\left(1;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

○ а) Знаходимо послідовно: $z'_x=9x^2y^4-6y+x$, $z''_{xx}=18xy^4+1$, $z'''_{xxy}=\left(18xy^4+1\right)'_y=72xy^3$. Обчислимо значення знайденої похідної в точці $A(-1;2)$: $z'''_{xxy}(-1;2)=72\cdot(-1)\cdot 2^3=-576$.

б) $z=\ln(x-y)$ – функція складена. Частинна похідна по змінній x внутрішньої функції рівна 1. $z'_x=\dfrac{1}{x-y}$, $z''_{xx}=-\dfrac{1}{(x-y)^2}$, $z'''_{xxx}=\left(-(x-y)^{-2}\right)'_x=2(x-y)^{-3}=\dfrac{2}{(x-y)^3}$. $z'''_{xxx}(3;2)=\dfrac{2}{(3-2)^3}=2$.

в) Функція $z=\cos(xy)$ складена. $z'_y=-\sin(xy)\cdot x=-x\sin(xy)$, $z''_{yx}=-1\cdot\sin(xy)-x\cdot\cos(xy)\cdot y=$ $=-\sin(xy)-xy\cos(xy)$, $z'''_{yxy}=-x\cos(xy)-x\cos(xy)-xy\cdot(-\sin(xy)\cdot x)=-2x\cos(xy)+x^2y\sin(xy)$. Тоді $z'''_{yxy}\left(1;\frac{\pi}{2}\right)=-2\cdot1\cdot\cos\left(1\cdot\frac{\pi}{2}\right)+1^2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\sin\left(1\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$.

✍ Приклад 4. З'ясуйте, чи задовольняє функція $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ рівняння $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

○Спочатку спростимо функцію, тоді обчислимо частинні похідні 2-го порядку по змінних *x* і *y*, підставимо у рівняння. $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\ln\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$, $z'_x=\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)\right)'_x=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot2x=\frac{x}{x^2+y^2}$, $z''_{xx}=\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x=$

$=\frac{x^2+y^2-x\cdot2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $z'_y=\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)\right)'_y=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot2y=\frac{y}{x^2+y^2}$, $z''_{yy}=\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y=$

$\frac{x^2+y^2-y\cdot2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}==\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$. Тоді $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{y^2-x^2+x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=0$. Отже, функція $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ задовольняє рівняння $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

✍ Приклад 5. Температурне поле пластини описується функцією $T(x,y)=100-0,5x^2-2y^2$ (градусів Цельсія), де *x* та *y* – координати точки на пластині (в сантиметрах). Знайдіть швидкість зміни температури в точці *M*(2; 1) при русі в напрямку осі *Ox*. Знайдіть швидкість зміни температури в тій же точці при русі в напрямку осі *Oy*. Поясніть, у якому напрямку температура змінюється швидше. Обчисліть значення частинних похідних у точці *O* (0;0) і поясніть отриманий результат.

○ Обчислимо частинну похідну по *x*: $T'_x=(100-0,5x^2-2y^2)'_x=-x$. У точці *M*(2; 1): $T'_x(2;1)=-2^0C/см$. Це означає, що при зміщенні з точки *M* праворуч на 1 см, температура впаде приблизно на 2 градуси. Обчислимо частинну похідну по *y*: $T'_y=(100-0,5x^2-2y^2)'_y=-4y$. У точці *M*(2; 1): $T'_y(2;1)=-4\cdot1=-4^0C/см$. Це означає, що при зміщенні з точки *M* вгору на 1 см, температура впаде на 4 градуси. Порівнюючи значення частинних похідних робимо висновок, що температура у заданій точці зменшується швидше у напрямку осі *Oy*. У точці *O* (0;0) обидві частинні похідні дорівнюють 0. Це означає, що в цій точці температура пластини не змінюється (миттєва швидкість зміни дорівнює нулю). У цій задачі точка (0;0) є «найгарячішою» точкою пластини (точкою максимуму), температура тут сягає 100^0C.

Завдання для аудиторної роботи

✍ 1. Знайдіть частинні похідні першого порядку заданих функцій: а) $z=4yx^2-xy^2+5x$; б) $z=5x^2e^y+xy-4\ln x+3y-1$; в) $u=x^2yz-y^2x^3z^2+5x^4-3y+22z$; г) $z=\frac{2y+x}{y}$; г) $z=e^{xy}$; д) $z=\frac{x^2-3y^4}{x^3+y^3}$; е) $z=tg\left(\frac{x^2}{y}\right)$; є) $z=\arcsin(x^2+y^2)$.

✍ 2. Знайдіть частинні похідні другого порядку заданих функцій і переконайтеся, що $z''_{xy}=z''_{yx}$: а) $z=3x^2-3x^3y^2+4y^5-3x-7$; б) $z=x\sin^2 y$; в) $z=\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$; г) $z=\ln\left(e^x+e^y\right)$.

✍ 3. Для заданих функцій обчисліть вказану частинну похідну у заданій точці: а) $z=4x^5y^3-6x^2y+3x-5y$, z'''_{xyy}, $A(1;1)$; б) $z=\ln(x+2y)$, z'''_{yyy}, $A(1;2)$; в) $z=\sin(xy)$, z'''_{yxx}, $A\left(1;\frac{\pi}{2}\right)$.

✍ 4. З'ясуйте, чи задовольняє функція $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{2}{u}$.

✍ Об'єм циліндра є функцією двох змінних: $V(r,h)=\pi r^2h$. Обчисліть частинні похідні V'_r та V'_h для $r=2,\ h=5$. Поясніть, зміна якого параметра (радіуса чи висоти) приведе до швидшого зростання об'єму в цій точці.

Завдання для самостійної роботи

✍ 1. Знайдіть частинні похідні першого порядку заданих функцій: а) $z=-4yx^2+3x^3y^2+5x-7y+3$; б) $z=x^2\cos y+2xy-5ye^x+3y^2-x^3$; в) $u=3xy^2z^2-2y^2x^3z+5x^4y^2-13y+2x$; г) $z=\dfrac{y^2-x}{x}$; ґ) $z=y^{\ln x}$; д) $z=\dfrac{x^2y-xy^4}{x+y}$; е) $z=\sin(x^2+y^2)$; є) $z=x\operatorname{arctg}(y^2)$.

✍ 2. Знайдіть частинні похідні другого порядку заданих функцій і переконайтеся, що $z''_{xy}=z''_{yx}$: а) $z=x^2y^3-x^3y^2$; б) $z=x^2\sin y$; в) $z=e^{x(x^2+y^2)}$.

✍ 3. Для заданих функцій обчисліть вказану частинну похідну у заданій точці: а) $z=x^3y^3-x^2y^2+3xy$, z'''_{xyx}, $A(-1;-1)$; б) $z=\ln(x^3+y^3)$, z'''_{xyy}, $A(1;0)$; в) $z=y\sin(xy)$, z'''_{yxx}, $A(1;\pi)$.

✍ 4. З'ясуйте, чи задовольняє функція $z=\sin(x-at)$ рівняння $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

✍ 5. Об'єм конуса обчислюється за формулою $V(r,h)=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$. Знайдіть швидкість зміни об'єму при зміні радіуса та при зміні висоти. Який параметр сильніше впливає на об'єм, якщо $r=h$?

Додаткові завдання

1. Покажіть, що для функції $z=f(x^2+y^2)$ завжди виконується співвідношення $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.
2. Знайдіть частинні похідні першого порядку: а) $z=\dfrac{1}{\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}}$; б) $z=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$; в) $z=(x+y)^x$.

3. З'ясуйте, чи має функція $z=|x|+|y|$ частинні похідні в точці (0; 0)? Відповідь обґрунтуйте. Продемонструйте вашу відповідь графічно (доцільно скористатися GeoGebra 3D).

Відповіді. Завдання для аудиторної роботи. 1. г) *Вказівка*: Запишіть функцію у вигляді суми. $z'_x=\dfrac{1}{y}$, $z'_y=-\dfrac{x}{y^2}$; ґ) $z'_x=ye^{xy}$, $z'_y=xe^{xy}$; д) $z'_x=\dfrac{-x^4+9x^2y^4+2xy^3}{\left(x^3+y^3\right)^2}$, $z'_y=\dfrac{-3y^6-129x^3y^3-3x^2y^2}{\left(x^3+y^3\right)^2}$; е) $z'_x=\dfrac{2x}{y\cos^2\left(\dfrac{x^2}{y}\right)}$, $z'_y=-\dfrac{x^2}{y^2\cos^2\left(\dfrac{x^2}{y}\right)}$; є) $z'_x=\dfrac{2x}{\sqrt{1-\left(x^2+y^2\right)^2}}$, $z'_y=\dfrac{2y}{\sqrt{1-\left(x^2+y^2\right)^2}}$. **2.** б) $z''_{xx}=0$, $z''_{xy}=z''_{yx}=\sin 2y$, $z''_{yy}=2x\cos 2y$; в) $z''_{xx}=\dfrac{ye^{\frac{y}{x}}}{x^4}\left(2x+y\right)$, $z''_{xy}=z''_{yx}=-\dfrac{e^{\frac{y}{x}}}{x^3}(x+y)$, $z''_{yy}=\dfrac{e^{\frac{y}{x}}}{x^2}$; г) $z''_{xx}=\dfrac{e^{x+y}}{\left(e^x+e^y\right)^2}$, $z''_{xy}=z''_{yx}=-\dfrac{e^{x+y}}{\left(e^x+e^y\right)^2}$, $z''_{yy}=\dfrac{e^{x+y}}{\left(e^x+e^y\right)^2}$. **3.** а) 120; б) $\dfrac{16}{125}$; в) $-\pi$. **4.** Так. **Завдання для самостійної роботи. 1.** г) $z'_x=-\dfrac{y^2}{x^2}$, $z'_y=\dfrac{2y}{x}$; ґ) $z'_x=\dfrac{y^{\ln x}\ln y}{x}$, $z'_y=\ln x\cdot y^{\ln x-1}$; д) $z'_x=\dfrac{x^2y+2xy^2-y^5}{(x+y)^2}$, $z'_y=\dfrac{x^3-4x^2y^3-3xy^4}{(x+y)^2}$; е) $z'_x=2x\cos(x^2+y^2)$, $z'_y=2y\cos(x^2+y^2)$; є) $z'_x=\operatorname{arctg}\left(y^2\right)$, $z'_y=\dfrac{2xy}{1+y^4}$. **2.** б) $z''_{xx}=2\sin y$, $z''_{xy}=z''_{yx}=2x\cos y$, $z''_{yy}=-x^2\sin y$; в) $z''_{xx}=e^{x^3+xy^2}(6x+(3x^2+y^2)^2)$, $z''_{xy}=z''_{yx}=e^{x^3+xy^2}(2x+4x^2y^2)$, $z''_{yy}=2ye^{x^3+xy^2}(1+3x^3+xy^2)$. **3.** а) –14; б) 0; в) π^3. **4.** Так. **Додаткові завдання. 1.** *Вказівка*: Врахуйте, що задана функція є складеною і, наприклад, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(x^2+y^2)\cdot 2x$. **2.** а) $z'_x=\dfrac{y}{(x^2+y^2)\operatorname{arctg}^2\left(\dfrac{y}{x}\right)}$, $z'_y=-\dfrac{x}{(x^2+y^2)\operatorname{arctg}^2\left(\dfrac{y}{x}\right)}$; б) $z'_x=-\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_y=\dfrac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$; в) *Вказівка*: Для знаходження частинної похідної 1-го порядку позмінній *x* доцільно записати функцію у вигляді $(x+y)^x=e^{x\ln(x+y)}$. Тоді $z'_x=e^{x\ln(x+y)}\cdot(x\ln(x+y))'_x$. Відносно

y функція $z=(x+y)^x$ є степеневою. **3.** *Вказівка*: Частинні похідні спробуйте знайти за означенням. Покажіть, що записані вами границі не існують.

ТЕМА 4. ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Теоретичні питання

1. Означення диференційовної функції 2-х змінних.
2. Необхідні умови диференційовності.
3. Достатня умова диференційовності.
4. Поняття повного диференціала 1-го порядку. Поняття частинних диференціалів 1-го порядку.
5. Застосування повного диференціала 1-го порядку.
6. Диференціали вищих порядків.

Література:

1. Шкіль М.І. Математичний аналіз: Підручник. У 2-х ч. Ч.2. 3-є видання, переробл. і доп. Київ: Вища школа. 2005. 510 с. С. 73-181. Режим доступу: https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Shkil_P2_2005_510.pdf
2. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: Підручник: У 2-х ч. Ч. 2. Київ: Либідь. 2003. 304 с. С. 50-73. Режим доступу: https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Dorogovtsev_P2_1994_304.pdf
3. Lebl J. Basic Analysis II: Introduction to Real Analysis, Volume II. Oklahoma: Jiří Lebl / University of Oklahoma. 2024. 244 p. P. 131–190. Режим доступу: https://www.jirka.org/ra/realanal2.pdf

Повторити: 1. Диференційовність функції однієї змінної.
2. Таблиця диференціалів елементарних функцій.

Основні теоретичні відомості

Функцію $z=f(x,y)$ називають *диференційовною в точці* (x_0,y_0), якщо її повний приріст у цій точці можна записати у вигляді $\Delta f(x_0,y_0)=A(x_0,y_0)\Delta x+B(x_0,y_0)\Delta y+\alpha(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)\Delta x+\beta(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)\Delta y$, де числа $A(x_0,y_0)$, $B(x_0,y_0)$ не залежать від Δx і Δy, $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\beta(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)=0$. Якщо функція $z=f(x,y)$ диференційовна в кожній точці області *D*, то її називають диференційовною в цій області.	
Якщо функція $z=f(x,y)$ диференційовна в точці (x_0,y_0), то функція в цій точці неперервна.	*Необхідна* умова диференційовності
Якщо функція $z=f(x,y)$ диференційовна в точці (x_0,y_0), то функція в цій точці існують частинні похідні 1-го порядку цієї функції і $A(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)$, $B(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)$.	*Необхідна* умова диференційовності
Якщо функція $z=f(x,y)$ в околі точки (x_0,y_0) має частинні похідні 1-го порядку, які неперервні в цій точці, то функція в цій точці диференційовна.	*Достатня* умова диференційовності
Лінійну відносно Δx і Δy частину повного приросту диференційовної в точці (x_0,y_0) функції $z=f(x,y)$ називають *повним диференціалом* 1-го порядку цієї функції.	*Позначення*: $df(x_0,y_0)=A(x_0,y_0)\Delta x+B(x_0,y_0)\Delta y$ Формула для обчислення : $df(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y$ $df(x,y)=f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy$
Частинні диференціали 1-го порядку	$d_x f(x,y)=f'_x(x,y)dx$ $d_y f(x,y)=f'_y(x,y)dy$
Повний диференціал 1-го порядку функції $z=f(x,y)$ застосовується для наближеного обчислення значень функції	$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)$
Повним диференціалом *n*-го порядку функції $z=f(x,y)$ називається повний диференціал 1-го порядку від диференціала (*n* – 1)-го порядку.	*Позначення*: $d^n f(x_0,y_0)=d(d^{n-1}f(x_0,y_0))$
Зокрема, повним диференціалом 2-го порядку функції $z=f(x,y)$ називається повний диференціал 1-го порядку від повного диференціала 1-го порядку.	$d^2 f(x,y)=f''_{xx}(x,y)(dx)^2+2f''_{xy}(x,y)dxdy+f''_{yy}(x,y)(dy)^2$
Аналогічно можна розглянути поняття диференційовної функції і повного диференціала функції кількох змінних (див. приклади нижче).	

Навчальні завдання

✍ <u>Приклад</u> <u>1.</u> Доведіть, що функція $f(x,y)=x+y^2$ диференційовна на R_2.

○ Виберемо довільну точку (x_0,y_0) і покажемо, що функція $f(x,y)=x+y^2$ диференційовна в цій точці. Для цього запишемо повний приріст цієї функції в точці (x_0,y_0): $\Delta f(x_0,y_0)=(x_0+\Delta x)+(y_0+\Delta y)^2-\left(x_0+{y_0}^2\right)=x_0+\Delta x+$ $+{y_0}^2+2y_0\Delta y+(\Delta y)^2-x_0-{y_0}^2=1\cdot\Delta x+2y_0\Delta y+0\cdot\Delta x+\Delta y\cdot\Delta y$. Введемо позначення: $A(x_0,y_0)=1$, $B(x_0,y_0)=2y_0$, $\alpha(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)=0$, $\beta(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)=\Delta y$. У нашому випадку числа $A(x_0,y_0)$, $B(x_0,y_0)$ не залежать від Δx і Δy, $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}0=0$, $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\beta(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta y=0$. Отже, за означенням функція $f(x,y)=x+y^2$ диференційовна в точці (x_0,y_0). Оскільки точка (x_0,y_0) – довільна, то задана функція диференційовна на R_2. На рис. 4.1 наведено графік функції $f(x,y)=x+y^2$. Ця поверхня не має «зламів», в кожній точці вона гладка.

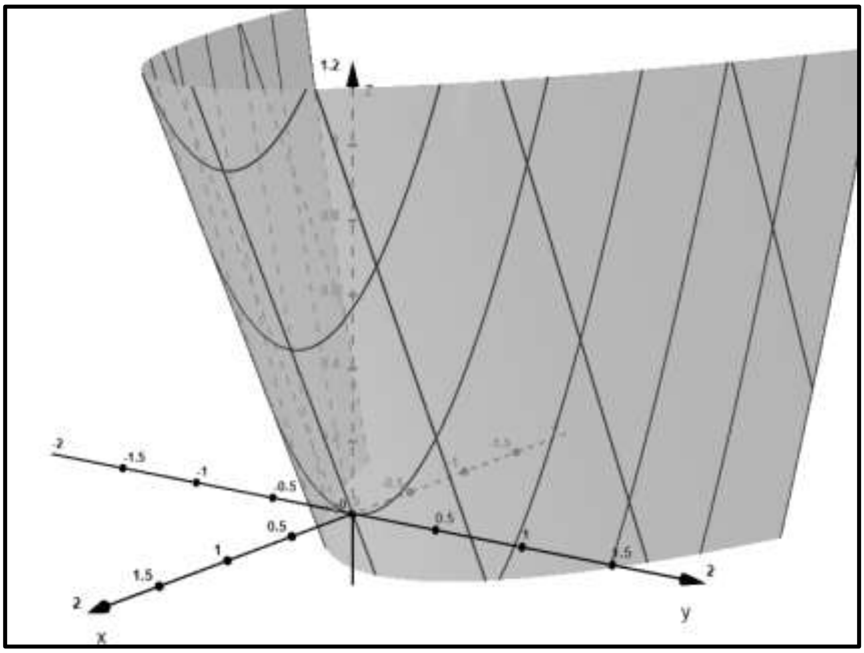


Рис. 4.1. Графік функції $f(x,y)=x+y^2$ (побудовано за допомогою GeoGebra 3D)

✍ <u>Приклад 2</u>. Дослідіть функцію $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ на диференційовність в точці (0; 0).

○Означення диференційовної функції можна переписати так: Функцію $z=f(x,y)$ називають *диференційовною в точці* (x_0,y_0), якщо її повний приріст у цій точці можна записати у вигляді $\Delta f(x_0,y_0)=A(x_0,y_0)\Delta x+B(x_0,y_0)\Delta y+\alpha(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)\cdot\rho$, де числа $A(x_0,y_0)$, $B(x_0,y_0)$ не залежать від Δx і Δy, $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, $\lim\limits_{\rho\to 0}\alpha(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)=0$. Запишемо повний приріст заданої функції в точці (0; 0): $\Delta f(0;0)=$ $=f(0+\Delta x;0+\Delta y)-f(0;0)=f(\Delta x;\Delta y)-f(0;0)=\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}-0=\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}$. Це можна записати у вигляді $\Delta f(0;0)=0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y+\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}$. Отже, $A=0$, $B=0$. З іншого боку, за означенням диференційовної функції, повний приріст має бути записаний як $\Delta f(0;0)=0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y+\alpha(0,0,\Delta x,\Delta y)\cdot\rho$, $\lim\limits_{\rho\to 0}\alpha(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)=0$. Порівнюючи обидва записи повного приросту маємо, що $\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}=\alpha(0,0,\Delta x,\Delta y)\cdot\rho=\alpha(0,0,\Delta x,\Delta y)\cdot\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$. Тоді $\alpha(0,0,\Delta x,\Delta y)=\dfrac{\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$. Перевіримо, чи виконується умова $\lim\limits_{\rho\to 0}\alpha(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)=0$. Зауважимо, що ця умова має виконуватися незалежно від того, як ми наближаємося до точки (0,0). Нехай $\Delta x=\Delta y\to 0$, тоді $\lim\limits_{\rho\to 0}\alpha(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta x|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta x)^2}}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|}{|\Delta x|\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\neq 0$. Отже, функція $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ не є диференційовною в точці (0; 0). На рис. 4.2 зображено графік функції $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ і переріз цієї поверхні площиною $y = x$ (лінія чорного кольору). Ця лінія чітко демонструє гострий злам у початку координат. Наявність хоча б одного такого зламу означає, що функція не є диференційовною в точці. (Порівняйте поверхні на рис. 4.1. і 4.2).

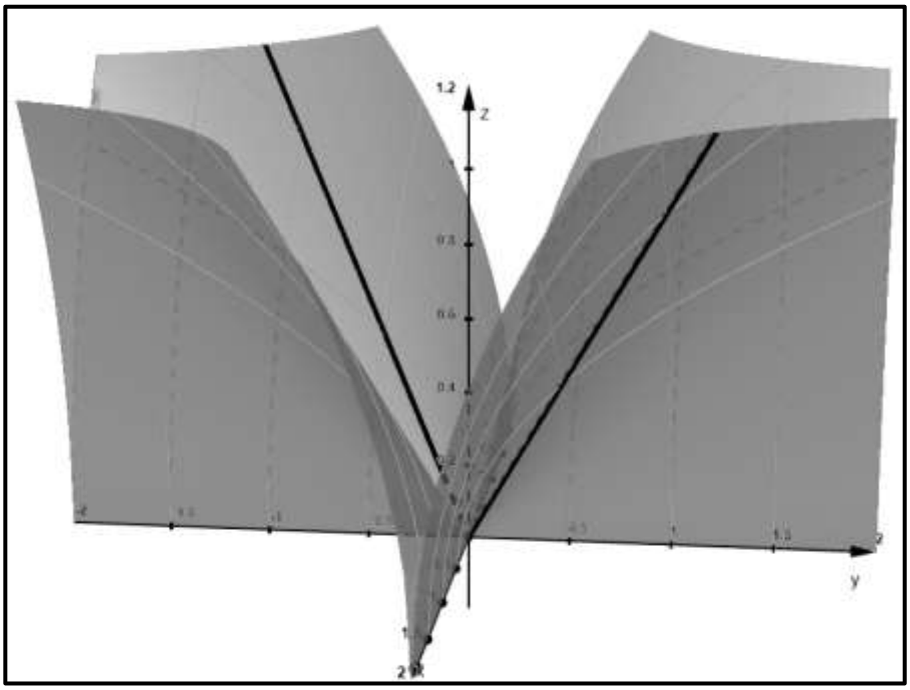


Рис. 4.2. Графік функції $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ (побудовано за допомогою GeoGebra 3D)

Хоча функція $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ не є диференційовною в точці (0; 0), проте вона має обидві частинні похідні 1-го порядку і є неперервною в точці (0; 0). Покажемо це. Дійсно, вище показано, що $\Delta f(0;0) = \sqrt{|\Delta x \cdot \Delta y|}$. Тоді $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \sqrt{|\Delta x \cdot \Delta y|} = 0$ і за означенням функція є неперервною в точці (0; 0). Знайдемо частинні похідні за означенням.

$f_x'(0;0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt{|\Delta x \cdot 0|} - 0}{\Delta x} = 0$. Аналогічно, $f_y'(0;0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\sqrt{|0 \cdot \Delta y|} - 0}{\Delta y} = 0$.

Таким чином, цей приклад ще раз акцентує увагу на тому, що існування частинних похідних 1-го порядку в точці, неперервність функції в точці є лише необхідними умовами, їхнє виконання не гарантує диференційованість функції в точці. (Згадайте відповідні твердження для функції однієї змінної!).

✍ Приклад 3. Знайдіть частинні й повний диференціал заданих функцій: а) $z = 2x^3y^2 + 3xy$; б) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; в) $u = \ln(2x^2 - 3y + 4z^3)$.

○ а) Використаємо формули: $d_x f(x, y) = f_x'(x, y)dx$, $d_y f(x, y) = f_y'(x, y)dy$, $df(x, y) = f_x'(x, y)dx + f_y'(x, y)dy$. Для цього обчислимо частинні похідні по кожній із змінних. $z_x' = 6x^2y^2 + 3y$, $z_y' = 4x^3y + 3x$. Тоді частинні диференціали: $d_x z(x, y) = z_x'(x, y)dx = (6x^2y^2 + 3y)dx$, $d_y z(x, y) = z_y'(x, y)dy = (4x^3y + 3x)dy$. Повний диференціал $dz(x, y) = (6x^2y^2 + 3y)dx + (4x^3y + 3x)dy$.

б) Аналогічно до попереднього прикладу: $z_x' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $z_y' = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Диференціали (частинні і повний) 1-го порядку: $dz_x = \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $dz_y = \dfrac{ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $dz = \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(xdx + ydy)$.

в) Функція $u = \ln(2x^2 - 3y + 4z^3)$ є функцією 3-х змінних. Тому буде три частинних диференціали і повний диференціал 1-го порядку. Обчислимо частинні похідні 1-го порядку по кожній із трьох змінних: $u_x' = \dfrac{4x}{2x^2 - 3y + 4z^3}$, $u_y' = \dfrac{-3}{2x^2 - 3y + 4z^3}$, $u_z' = \dfrac{12z^2}{2x^2 - 3y + 4z^3}$. Частинні диференціали: $du_x = \dfrac{4xdx}{2x^2 - 3y + 4z^3}$, $du_y = \dfrac{-3dy}{2x^2 - 3y + 4z^3}$,

$du_z = \dfrac{12z^2dz}{2x^2-3y+4z^3}$. Повний диференціал 1-го порядку: $du = \dfrac{4xdx}{2x^2-3y+4z^3} + \dfrac{-3dy}{2x^2-3y+4z^3} + \dfrac{12z^2dz}{2x^2-3y+4z^3}$ або $du = \dfrac{1}{2x^2-3y+4z^3}\left(4xdx - 3dy + 12z^2dz\right)$.

✍ <u>Приклад 4.</u> Знайдіть повний диференціал функції $z = \arccos\dfrac{x}{y}$ в точці $A(1;2)$.

○ Обчислимо значення частинних похідних заданої функції в точці $A(1;2)$. Маємо: $z'_x(A) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}}\cdot\dfrac{1}{y}\Bigg|_A = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}}\cdot\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $z'_y(A) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}}\cdot\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)\Bigg|_A = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}}\cdot\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. Тоді частинні диференціали $dz_x(A) = -\dfrac{dx}{\sqrt{3}}$, $dz_y(A) = \dfrac{dy}{2\sqrt{3}}$; повний диференціал $dz(A) = -\dfrac{dx}{\sqrt{3}} + \dfrac{dy}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}(-2dx + dy)$.

✍ <u>Приклад 5</u>. Знайдіть значення повного диференціала функції $z = 3x + 4y - \sqrt{x^2+y^2}$, якщо x = 3, y = 4, $\Delta x = 0,01$, $\Delta y = 0,1$.

○ Знайдемо частинні похідні заданої функції та обчислимо їхні значення у вказаній точці: $z'_x(x,y) = 3 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_x(3,4) = 3 - \dfrac{3}{\sqrt{3^2+4^2}} = 3 - 0,6 = 2,4$; $z'_y(x,y) = 4 - \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_y(3,4) = 4 - \dfrac{4}{\sqrt{3^2+4^2}} = 3,2$. Тоді повний диференціал для довільних приростів має вигляд $dz(3,4) = 2,4dx + 3,2dy$, а для вказаних приростів $dz(3,4) = 2,4\cdot 0,01 + 3,2\cdot 0,1 = 0,344$.

✍ <u>Приклад 6</u>. За допомогою повного диференціала обчисліть наближено $1,01^{3,02}$.

○ Застосуємо формулу $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0)$. Спочатку виберемо відповідну функцію, враховуючи вигляд виразу, значення якого наближено треба обчислити. Тут це може бути $f(x,y) = x^y$. Далі визначаємо x_0, y_0 так, щоб значення вибраної функції для x_0, y_0 можна обчислити усно. Для заданого виразу і вибраної функції маємо, що $x_0 = 1$, $y_0 = 3$. Обчислимо $f(x_0,y_0) = f(1,3) = 1^3 = 1$. Обчислимо частинні похідні 1-го порядку й їхні значення для $x_0 = 1$, $y_0 = 3$: $f'_x(x,y) = yx^{y-1}$, $f'_x(1,3) = 3\cdot 1^2 = 3$; $f'_y(x,y) = x^y\ln x$, $f'_y(1,3) = 1^3\cdot\ln 1 = 0$. Оскільки $x_0 + \Delta x = 1,01$, $x_0 = 1$, то $\Delta x = 0,01$; аналогічно знаходимо, що $\Delta y = 0,02$. Тоді значення повного диференціала $df(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y$ для заданої задачі буде $df(1,3) = 3\cdot 0,01 + 0\cdot 0,02 = 0,03$. Отже, $1,01^{3,02} = 1 + 0,03 = 1,03$.

✍ <u>Приклад 7</u>. Запишіть повний диференціал 2-го порядку функції $f(x,y) = e^{xy^2}$.

○ Застосуємо формулу $d^2f(x,y) = f''_{xx}(x,y)(dx)^2 + 2f''_{xy}(x,y)dxdy + f''_{yy}(x,y)(dy)^2$. Для цього обчислимо послідовно частинні похідні 1-го й 2-го порядків. $f'_x(x,y) = y^2e^{xy^2}$, $f'_y(x,y) = 2xye^{xy^2}$; $f''_{xx}(x,y) = y^4e^{xy^2}$, $f''_{xy}(x,y) = 2ye^{xy^2} + y^2\cdot 2xye^{xy^2} = 2ye^{xy^2}(1+xy^2)$, $f''_{yy}(x,y) = 2xe^{xy^2} + 2xy\cdot 2xye^{xy^2} = 2xe^{xy^2}(1+2xy^2)$. Тоді $d^2f(x,y) = y^4e^{xy^2}(dx)^2 + 4ye^{xy^2}(1+xy^2)dxdy + 2xe^{xy^2}(1+2xy^2)(dy)^2$.

Завдання для аудиторної роботи

✍ 1. Доведіть, що функція $f(x,y) = x^2 + y$ диференційовна на R_2.

✍ 2. Знайдіть частинні й повний диференціал заданих функцій: а) $z = 4x^2y^3 - 5xy^2$; б) $z = \ln(x^2+y^2)$; в) $u = \sqrt{x^2+2y^2+3z^2}$.

✍ 3. Знайдіть повний диференціал функції $z = \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}$ в точці $A(1;1)$.

✍ 4. Знайдіть значення повного диференціала функції $z = x^2 - xy + y^2$, якщо x = 2, y = 1, $\Delta x = 0,02$, $\Delta y = 0,05$.

✍ 5. За допомогою повного диференціала обчисліть наближено $\sqrt{3,02^2+3,99^2}$.

✍ 6. Запишіть повний диференціал 2-го порядку функції $f(x,y)=\cos(xy^2)$ .i

Завдання для самостійної роботи

✍ 1. Доведіть, що функція $f(x,y)=xy$ диференційовна на R_2 .

✍ 2. Знайдіть частинні й повний диференціал заданих функцій: а) $z=3x^4y^2+2x^3y$; б) $z=\sqrt{2x+y^2}$; в) $u=e^{x^2+y+z^3}$.

✍ 3. Знайдіть повний диференціал функції $z=\ln(e^x+e^y)$ в точці $A(0;1)$.

✍ 4. Знайдіть значення повного диференціала функції $z=2xy+3y^2-x$, якщо x = 1, y = 2, $\Delta x=0,1$, $\Delta y=-0,02$

✍ 5. За допомогою повного диференціала обчисліть наближено $1,01^{2,02}$.

✍ 6. Запишіть повний диференціал 2-го порядку функції $f(x,y)=\sin(x^2y)$.

Додаткові завдання

1. Дослідіть на диференційовність функцію $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ в точці (0; 0). Чи має ця функція частинні похідні 1-го порядку в точці (0; 0)? Продемонструйте ваш висновок за допомогою графіка цієї функції.

2. Для функції $f(x,y)=x^2+xy$ у точці M(1; 2) обчисліть повний приріст Δz та повний диференціал dz , якщо $\Delta x=0,1$ та $\Delta y=0,2$. Знайдіть різницю між ними ($\Delta z - dz$) та поясніть її математичний зміст.

3. Знайдіть d^2u для функцій: а) $u=e^{xyz}$; б) $u=\sin(x+y+z)$.

4. Сторони прямокутника виміряно з точністю до 0,1 см і вони дорівнюють a = 5 см, b = 10 см. Оцініть абсолютну похибку при обчисленні площі цього прямокутника (за допомогою повного диференціала).

Відповіді. Завдання для аудиторної роботи. 2. а) $dz=(8xy^3-5y^2)dx+(12x^2y^2-10xy)dy$; б) $dz=\dfrac{2xdx+2ydy}{x^2+y^2}$; в) $du=\dfrac{xdx+2ydy+3zdz}{\sqrt{x^2+2y^2+3z^2}}$. **3.** $dz=-\dfrac{1}{2}(dx-dy)$. **4.** $0,06$. **5.** $5,004$. **6.** $d^2z=-y^4\cos(xy^2)dx^2+$ $+2(-2y\sin(xy^2)-2xy^3\cos(xy^2))dxdy+(-2x\sin(xy^2)-4x^2y^2\cos(xy^2))dy^2$.

Завдання для самостійної роботи. 2. а) $dz=(12x^3y^2+6x^2y)dx+(6x^4y+2x^3)dy$; б) $dz=\dfrac{dx+ydy}{\sqrt{2x+y^2}}$; в) $du=e^{x^2+y+z^3}\left(2xdx+dy+3z^2dz\right)$. **3.** $dz=\dfrac{dx+edy}{1+e}$. **4.** $0,02$. **5.** $1,02$. **6.** $d^2z=(2y\cos(x^2y)-4x^2y^2\sin(x^2y))dx^2+$ $+2(2x\cos(x^2y)-2x^3y\sin(x^2y))dxdy-x^4\sin(x^2y)dy^2$.

Додаткові завдання. 1. Не є диференційовною в точці (0; 0); обидві частинні похідні 1-го порядку існують. **2.** $\Delta z=0,63$, $dz=0,6$. **3.** а) $du=e^{xyz}\left(y^2z^2dx^2+x^2z^2dy^2+x^2y^2dz^2+2(z+xyz^2)dxdy+2(y+xy^2z)dxdz+2(x+x^2yz)dydz\right)$. **4.** $\Delta S=1,5$.

ТЕМА 5. ПОХІДНІ СКЛАДЕНИХ І НЕЯВНО ЗАДАНИХ ФУНКЦІЙ. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА ДЛЯ ФУНКЦІЇ 2-Х ЗМІННИХ

Теоретичні питання

1. Похідна функції $z = f(x, y)$, $x = x(t),\ y = y(t)$.
2. Похідні функції $z = f(x, y)$, $x = x(u, v),\ y = y(u, v)$.
3. Існування й диференційовність неявно заданої функції однієї змінної.
4. Існування й диференційовність неявно заданої функції двох змінних.
5. Формула Тейлора функції двох змінних.

Література:

1. Шкіль М.І. Математичний аналіз: Підручник. У 2-х ч. Ч.2. 3-є видання, переробл. і доп. Київ: Вища школа. 2005. 510 с. С. 73-181. Режим доступу: https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Shkil_P2_2005_510.pdf
2. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: Підручник: У 2-х ч. Ч. 2. Київ: Либідь. 2003. 304 с. С. 50-73. Режим доступу: https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Dorogovtsev_P2_1994_304.pdf
3. Lebl J. Basic Analysis II: Introduction to Real Analysis, Volume II. Oklahoma: Jiří Lebl / University of Oklahoma. 2024. 244 p. P. 131–190. Режим доступу: https://www.jirka.org/ra/realanal2.pdf

Повторити: 1. Похідна складеної функції однієї змінної.
2. Правило знаходження похідної неявно заданої функції однієї змінної.
3. Формула Тейлора функції однієї змінної.
4. Диференціали функції двох змінних.

Основні теоретичні відомості

<table>
<tr><td>Нехай $z = f(x, y)$, $D(f) = D \subset R_2$, $x = x(t),\ y = y(t)$, $t \in \langle a; b\rangle$, $\forall t \in \langle a; b\rangle\ (x(t), y(t)) \in D$, $\exists x'(t),\ y'(t)$, $t \in \langle a; b\rangle$, $z = f(x, y)$ диференційовна в кожній точці $(x(t),\ y(t)) \in D$.</td><td>Функція $z = f(x(t), y(t))$, $t \in \langle a; b\rangle$ складена функція однієї змінної і $$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$</td></tr>
<tr><td>Нехай $z = f(x, y)$, $D(f) = D \subset R_2$, $x = x(u, v),\ y = y(u, v)$, $(u, v) \in W \subset R_2$, $\forall (u, v) \in W\ (x(u, v), y(u, v)) \in D$, $\exists x'_u(u, v), x'_v(u, v), y'_u(u, v), y'_v(u, v)$, $(u, v) \in W \subset R_2$, $z = f(x, y)$ диференційовна в кожній точці $(x,\ y) \in D$.</td><td>Функція $z = f(x(u, v), y(u, v))$, $(u, v) \in W$ складена функція двох змінних і $$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$ $$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Нехай для функції $z = F(x, y)$ виконуються умови:
1) функція $F(x, y)$ визначена й неперервна в прямокутнику $\Pi' = \{(x, y) \mid a_1 < x_0 < a_2, b_1 < y_0 < b_2\}$ з центром в точці (x_0, y_0);
2) існують неперервні частинні похідні $F'_x(x, y), F'_y(x, y)$, $(x, y) \in \Pi'$;
3) $F(x_0, y_0) = 0$;
4) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.
Тоді існує окіл точки (x_0, y_0), в якому рівняння $F(x, y) = 0$ задає функцію $y = f(x)$ неявно, ця функція неперервна в деякому околі точки x_0, $y_0 = f(x_0)$, функція $y = f(x)$ в точці x_0 має неперервну похідну $$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Нехай для функції $u = F(x, y, z)$ виконуються умови:
1) функція $u = F(x, y, z)$ визначена й неперервна в паралелепіпеді $\Pi' = \{(x, y, z) \mid a_1 < x_0 < a_2, b_1 < y_0 < b_2, c_1 < z_0 < c_2\}$ з центром в точці (x_0, y_0, z_0);
2) існують неперервні частинні похідні $F'_x(x, y, z), F'_y(x, y, z), F'_z(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \Pi'$;
3) $F(x_0, y_0, z_0) = 0$;
4) $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.
Тоді існує окіл точки (x_0, y_0, z_0), в якому рівняння $F(x, y, z) = 0$ задає функцію $z = f(x, y)$ неявно, ця функція неперервна в деякому околі точки (x_0, y_0), $z_0 = f(x_0, y_0)$, функція $z = f(x, y)$ в околі точки (x_0, y_0) має неперервні частинні похідні:</td></tr>
</table>

$f'_x(x,y) = -\dfrac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$, $f'_y(x,y) = -\dfrac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$.
Нехай функція $z = f(x,y)$ задана в зв'язній області $D \subset R_2$ і має в цій області неперервні частинні похідні до n-ого порядку включно. Формула Тейлора для функції двох змінних: $\Delta f(x_0,y_0) = df(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0,y_0) + ... + \frac{1}{n!}d^n f(x_0,y_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)$ $f(x,y) = f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0,y_0) + ... + \frac{1}{n!}d^n f(x_0,y_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)$

Навчальні завдання

✍ Приклад 1. Знайдіть похідну функцій: а) $z = e^{2x-3y}$, $x = \cos t$, $y = t^2$; б) $z = \arcsin(x-y)$, $x = t^2$, $y = t^3$.

○ Можна запропонувати 2 способи розв'язання такої задачі: 1 спосіб – записати явно функцію $z = z(t)$ і знайти похідну складеної функції однієї змінної; 2 спосіб – застсоувати формулу $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$.

а) 1спосіб. Якщо $x = \cos t$, $y = t^2$, то $z = e^{2\cos t - 3t^2}$. Тоді $\frac{dz}{dt} = e^{2\cos t-3t^2}\cdot\left(2\cos t - 3t^2\right)' = \left(-2\sin t - 6t\right)e^{2\cos t-3t^2}$.

2 спосіб. Обчислимо похідні, які записані у формулі $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2e^{2x-3y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -3e^{2x-3y}$, $\frac{dx}{dt} = -\sin t$, $\frac{dy}{dt} = 2t$. Підставимо знайдені похідні у записану формулу і врахуємо, що $x = \cos t$, $y = t^2$:
$\frac{dz}{dt} = 2e^{2x-3y}\cdot\left(-\sin t\right) + \left(-3e^{2x-3y}\right)\cdot 2t = e^{2x-3y}(-2\sin t - 6t) = (-2\sin t - 6t)\, e^{2\cos t - 3t^2}$.

б) 1спосіб. Якщо $x = t^2$, $y = t^3$, то $z = \arcsin(t^2 - t^3)$. Тоді $\frac{dz}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(t^2-t^3\right)^2}}(t^2-t^3)' = \frac{2t-3t^2}{\sqrt{1-\left(t^2-t^3\right)^2}}$. 2 спосіб. Обчислимо похідні, які записані у формулі $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}$, $\frac{dx}{dt} = 2t$, $\frac{dy}{dt} = 3t^2$. Підставимо знайдені похідні у записану формулу і врахуємо, що $x = t^2$, $y = t^3$:
$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}\cdot 2t - \frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}\cdot 3t^2 = \frac{2t-3t^2}{\sqrt{1-(x-y)^2}} = \frac{2t-3t^2}{\sqrt{1-(t^2-t^3)^2}}$.

✍ Приклад 2. Знайдіть частинні похідні функцій: а) $z = x^2y - xy^2$, $x = u\cos v$, $y = u\sin v$; б) $z = x\ln y$, $x = \frac{u}{v}$, $y = u - v$.

○ Застосуємо формули: $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$.

а) Знайдемо частинні похідні, які входять в записані вище формули: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy - y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - 2xy$, $\frac{\partial x}{\partial u} = \cos v$, $\frac{\partial x}{\partial v} = -u\sin v$, $\frac{\partial y}{\partial u} = \sin v$, $\frac{\partial y}{\partial v} = u\cos v$. Тоді $\frac{\partial z}{\partial u} = \left(2xy - y^2\right)\cdot\cos v + \left(x^2 - 2xy\right)\cdot\sin v$, $\frac{\partial z}{\partial v} = \left(2xy - y^2\right)\cdot\left(-u\sin v\right) + \left(x^2 - 2xy\right)\cdot\left(u\cos v\right)$. Враховуючи, що $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, маємо: $\frac{\partial z}{\partial u} = 3u^2\sin v\cos v(\cos v - \sin v)$, $\frac{\partial z}{\partial v} = u^3(\sin v + \cos v)(1 - 3\sin v\cos v)$.

б) Аналогічно, знайдемо всі частинні похідні: $\frac{\partial z}{\partial x} = \ln y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y}$, $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{v}$, $\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}$, $\frac{\partial y}{\partial u} = 1$, $\frac{\partial y}{\partial v} = -1$. Тоді $\frac{\partial z}{\partial u} = \ln y\cdot\frac{1}{v} + \frac{x}{y}\cdot 1 = \frac{1}{v}\ln(u-v) + \frac{u}{v(u-v)}$, $\frac{\partial z}{\partial v} = \ln y\cdot\left(-\frac{u}{v^2}\right) + \frac{x}{y}\cdot(-1) = -\frac{u}{v^2}\ln(u-v) - \frac{u}{v(u-v)}$.

✍ Приклад 3. З'ясуйте, чи задає рівняння $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$ функцію $y = f(x)$. У випадку позитивної відповіді знайдіть $f'(x)$.

○ Перевіримо виконання умов відповідної теореми. Дослідимо, чи має рівняння $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$ хоча би один дійсний розв'язок. Виберемо довільне значення y, нехай це $y = 0$, тоді $xe^0 + 0\cdot e^x - e^0 = 0$, звідки $x = 1$. Розглянемо окіл точки (1; 0). Функції $F(x,y) = xe^y + ye^x - e^{xy}$, $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = x + ye^x - ye^{xy}$, $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = xe^y + e^x - xe^{xy}$ неперервні на R_2, тому і в околі точки (1; 0). Крім того, $\frac{\partial F(1,0)}{\partial y} = 1\cdot e^0 + e^1 - 1\cdot e^0 = e \neq 0$. Отже, умови теореми виконуються, тому рівняння $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$ задає неявно функцію $y = f(x)$ і її похідна $f'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\frac{x + ye^x - ye^{xy}}{xe^y + e^x - xe^{xy}}$.

✍ <u>Приклад 4</u>. Знайдіть похідну функцій, заданих неявно: а) $x^3y + xy^3 = 5$; б) $\cos(xy) + e^{xy} - xy^3 = 9$.

○ У обох випадках маємо неявно задану функцію однієї змінної $y = f(x)$. Тому застосуємо формулу $f'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$.

а) Тут $F(x,y) = x^3y + xy^3 - 5$, тому $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 3x^2y + y^3$, $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x^3 + 3xy^2$ і $f'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\frac{3x^2y + y^3}{x^3 + 3xy^2}$.

б) Тут $F(x,y) = \cos(xy) + e^{xy} - xy^3 - 9$, тому $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = -y\sin(xy) + ye^{xy} - y^3$, $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -x\cos(xy) + xe^{xy} - 3xy^2$ і $f'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\frac{-y\sin(xy) + ye^{xy} - y^3}{-x\cos(xy) + xe^{xy} - 3xy^2} = -\frac{y\sin(xy) - ye^{xy} + y^3}{x\cos(xy) - xe^{xy} + 3xy^2}$.

✍ <u>Приклад 5</u>. З'ясуйте, чи задає рівняння $e^z - x^2y + z + 6 = 0$ функцію $z = f(x,y)$. У випадку позитивної відповіді знайдіть $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$.

○ Перевіримо виконання умов теореми про існування й диференційовність неявно заданої функції двох змінних. Дослідимо, чи має рівняння $e^z - x^2y + z + 6 = 0$ хоча би один дійсний розв'язок. Нехай $z = 0, x = 1$ (вибрали довільно). Тоді $e^0 - 1^2\cdot y + 0 + 6 = 0$, звідки $y = 7$. В околі точки (1; 7; 0) функції $F(x,y,z) = e^z - x^2y + z + 6$, $F'_x(x,y,z) = -2xy$, $F'_y(x,y,z) = -x^2$, $F'_z(x,y,z) = e^z + 1$ неперервні в околі точки (1; 7; 0) і $F'_z(1;7;0) = e^0 + 1 = 2 \neq 0$. Умови теореми виконуються, отже, рівняння $e^z - x^2y + z + 6 = 0$ задає неявно функцію двох змінних $z = f(x,y)$. Її частинні похідні обчислимо за формулами: $f'_x(x,y) = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} = -\frac{-2xy}{e^z + 1} = \frac{2xy}{e^z + 1}$; $f'_y(x,y) = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} = -\frac{x^2}{e^z + 1}$.

✍ <u>Приклад 6</u>. Знайдіть частинні похідні функцій, заданих неявно: а) $z^3 + 3xyz - 2xy^2 = x + y$; б) $e^{xyz} - 3xyz = 25$.

○ У обох випадках маємо неявно задану функцію двох змінних $z = f(x,y)$. Тому застосуємо формули $f'_x(x,y) = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$, $f'_y(x,y) = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$.

а) Тут $F(x,y,z) = z^3 + 3xyz - 2xy^2 - x - y$, тому $\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x} = 3yz - 2y^2 - 1$, $\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y} = 3xz - 4xy - 1$, $\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z} = 3z^2 + 3xy$. Тоді $f'_x(x,y) = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} = -\frac{3yz - 2y^2 - 1}{3z^2 + 3xy}$, $f'_y(x,y) = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} = -\frac{3xz - 4xy - 1}{3z^2 + 3xy}$.

б) Тут $F(x,y,z) = e^{xyz} - 3xyz - 25$, тому $\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x} = yze^{xyz} - 3yz$, $\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y} = xze^{xyz} - 3xz$, $\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z} = xye^{xyz} - 3xy$. Тоді $f'_x(x,y) = -\frac{yze^{xyz} - 3yz}{xye^{xyz} - 3xy} = -\frac{yz(e^{xyz} - 3)}{xy(e^{xyz} - 3)} = -\frac{z}{x}$, $f'_y(x,y) = -\frac{xze^{xyz} - 3xz}{xye^{xyz} - 3xy} = -\frac{xz(e^{xyz} - 3)}{xy(e^{xyz} - 3)} = -\frac{z}{y}$

✍ <u>Приклад 7</u>. Розвиньте функцію $f(x,y) = x^2 + 5xy - y^2$ за формулою Тейлора в околі точки $M_0(-1;2)$.

○ Задана функція як многочлен двох змінних має неперервні частинні похідні будь-якого порядку, але частинні похідні порядку вищого, ніж два, будуть рівні нулю. Дійсно, $f'_x(x,y)=2x+5y$, $f'_y(x,y)=5x-2y$, $f''_{xx}(x,y)=2$, $f''_{xy}(x,y)=5$, $f''_{yy}(x,y)=-2$. Оскільки всі частинні похідні 2-го порядку є сталими, то всі частинні похідні вищих порядків будуть рівні нулю. Отже, формула Тейлора матиме вигляд:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0).$$

Обчислимо доданки, які входять в цю формулу:

$$f(x_0,y_0)=f(-1;2)=(-1)^2+5\cdot(-1)\cdot 2-2^2=1-10-4=-13,$$

$$df(x_0,y_0)=df(-1;2)=f'_x(-1;2)\Delta x+f'_y(-1;2)\Delta y=(2\cdot(-1)+5\cdot 2)(x-(-1))+(5\cdot(-1)-2\cdot 2)(y-2)=8(x+2)-9(y-2),$$

$$d^2f(x_0,y_0)=d^2f(-1;2)=f''_{xx}(-1;2)\Delta x^2+2f''_{xy}(-1;2)\Delta x\Delta y+f''_{yy}(-1;2)\Delta y^2=2(x+1)^2+2\cdot 5(x+1)(y-2)-2(y-2)^2.$$

Отже,

$$f(x,y)=-13+8(x+2)-9(y-2)+(x+1)^2+5(x+1)(y-2)-(y-2)^2.$$

✍ Приклад 8. Розвиньте функцію $f(x,y)=x^y$ за формулою Тейлора за степенями $(x-1)$, $(y-1)$ за формулою Тейлора, записавши члени 1-го і 2-го порядку включно.

Знайдемо частинні похідні до другого порядку включно й обчислимо їхні значення в точці $M_0(1;1)$. Маємо: $f'_x(x,y)=yx^{y-1}$, $f'_y(x,y)=x^y\ln x$, $f'_x(1;1)=1$, $f'_y(1;1)=1\cdot\ln 1=0$; $f''_{xx}(x,y)=y(y-1)x^{y-2}$, $f''_{xy}(x,y)=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x$, $f''_{yy}(x,y)=x^y\ln^2 x$, $f''_{xx}(1;1)=0$, $f''_{xy}(1;1)=1+0=1$, $f''_{yy}(x,y)=1\cdot\ln^2 1=0$. Обчислимо: $f(1;1)=1$, $df(1;1)=1\cdot(x-1)+0\cdot(y-1)==(x-1)$, $d^2f(1;1)=0\cdot(x-1)^2+2\cdot 1\cdot(x-1)(y-1)+0\cdot(y-1)^2=2(x-1)(y-1)$. Тоді розвинення можна записати так: $f(x,y)=x^y\approx 1+(x-1)+(x-1)(y-1)$. На рисунку 5.1 поверхня $z=x^y$ зображена сірим кольором, а поверхня $z=1+(x-1)+(x-1)(y-1)$ - зеленим кольором, це квадратичне наближення в околі точки *A*(1, 1, 1). Видно, що в безпосередній близькості до точки *A* поверхні майже збігаються.

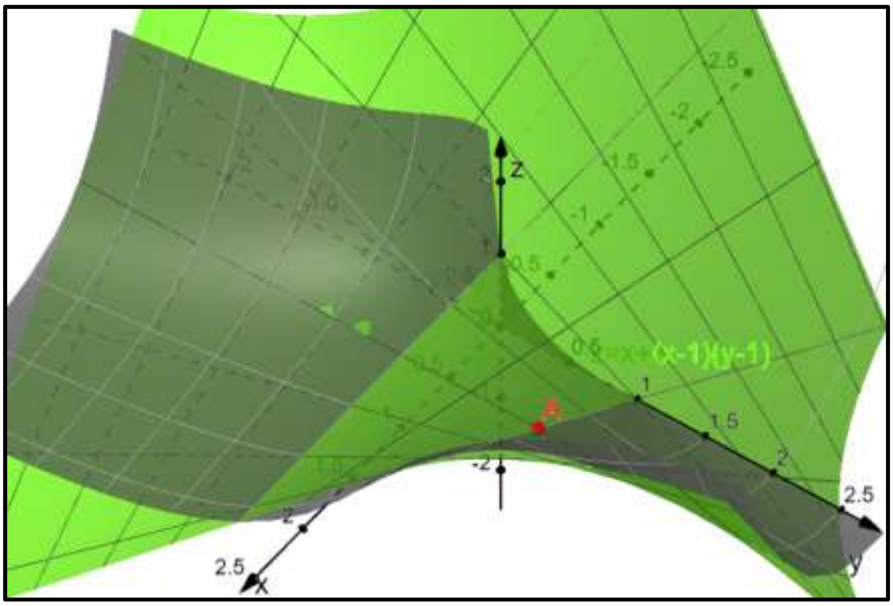


Рис. 5.1. Локальна апроксимація функції $z=x^y$ многочленом Тейлора другого порядку

Завдання для аудиторної роботи

✍ 1. Знайдіть похідну функцій: а) $z=\cos(3x-4y)$, $x=e^t$, $y=t^2$; б) $z=\operatorname{arctg}(xy)$, $x=\frac{1}{t^2}$, $y=\sqrt{t}$.

✍ 2. Знайдіть частинні похідні функцій: а) $z=\arccos\left(\frac{x}{y}\right)$, $x=u+v$, $y=u-v$; б) $z=x^2e^y$, $x=uv$, $y=u+v$.

✍ 3. З'ясуйте, чи задає рівняння $x^3+y^3-4{,}5xy=0$ функцію $y=f(x)$. У випадку позитивної відповіді знайдіть $f'(x)$.

✍ 4. Знайдіть похідну функцій, заданих неявно: а) $x^5y+xy^5=3$; б) $\cos(x+y)+e^{x+y}-x^2y^3=86$.

✍ 5. З'ясуйте, чи задає рівняння $x^2+y^2+z^2-4z=0$ функцію $z=f(x,y)$. У випадку позитивної відповіді знайдіть $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$.

✍ 6. Знайдіть частинні похідні функцій, заданих неявно: а) $z^4+3xyz^2-2xy^2z=xy+y^2$; б) $\cos(xyz)-5xyz=2$.

✍ 7. Розвиньте функцію $f(x,y)=x^2-2xy+3y^2-4x+5y+1$ за формулою Тейлора в околі точки $M_0(1;-1)$.

✍ 8. Записати формулу Тейлора до членів 2-го порядку для $f(x,y)=e^x\sin y$ в околі точки (0; 0).

Завдання для самостійної роботи

✍ 1. Знайдіть похідну функцій: а) $z=\ln(x^2+y^2)$, $x=t\sin t$, $y=t\cos t$; б) $z=e^{xy}$, $x=\dfrac{1}{t}$, $y=t^3$.

✍ 2. Знайдіть частинні похідні функцій: а) $z=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right)$, $x=u+v$, $y=u-v$; б) $z=x^2+xe^y$, $x=\dfrac{v}{u}$, $y=uv$.

✍ 3. З'ясуйте, чи задає рівняння $x^2e^y+y^2e^x-e^{2xy}=0$ функцію $y=f(x)$. У випадку позитивної відповіді знайдіть $f'(x)$.

✍ 4. Знайдіть похідну функцій, заданих неявно: а) $4xy^3-3xy^5=7$; б) $\sin\left(x+y\right)+e^{x^2y}-xy^3=0$.

✍ 5. З'ясуйте, чи задає рівняння $z^3-3xyz=27$ функцію $z=f(x,y)$. У випадку позитивної відповіді знайдіть $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$.

✍ 6. Знайдіть частинні похідні функцій, заданих неявно: а) $z^5+e^{xy}z^2=xy+y^2$; б) $\ln(x+y+z)-5x^2y^2z^2=2xyz$.

✍ 7. Розвиньте функцію $f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$ за формулою Тейлора в околі точки $M_0(1;-2)$.

✍ 8. Записати формулу Тейлора до членів 2-го порядку включно для $f(x,y)=\ln(1+x+2y)$ в околі точки (0; 0).

Додаткові завдання

1. З'ясуйте, чи задає рівняння $z^3-3xyz=a^3$ функцію $z=f(x,y)$. У випадку позитивної відповіді знайдіть $d^2z(0;0;a)$

2. З'ясуйте, чи задає рівняння $3x^2y^2+2z^2xy-2zx^3+4zy^3+4=0$ функцію $z=f(x,y)$. У випадку позитивної відповіді знайдіть $d^2z(2;1;2)$.

3. Доведіть, що функція $z=\varphi(x^2+y^2)$, де φ – довільна диференційовна функція, задовольняє рівняння $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

4. Знайти члени розкладу (до 2-го порядку включно) розвинення за степенями $(x-1)$ і $(y-1)$ функції, яка задана неявно рівнянням $z^3+yz-xy^2-x^3=0$, якщо $z(1;1)=1$.

Відповіді. Завдання для аудиторної роботи. 1. а) $z'=(8t-3e^t)\sin(3e^t-4t^2)$; б) $z'=-\dfrac{3\sqrt{t}}{2(t^3+1)}$. **2.** а) $\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{v}{(u-v)\sqrt{-uv}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{-u}{(u-v)\sqrt{-uv}}$; б) $z'_u=e^{u+v}(2uv^2+u^2v^2)$, $z'_v=e^{u+v}(2u^2v+u^2v^2)$. **3.** Так, $f'(x)=\dfrac{3y-2x^2}{2y^2-3x}$. **4.** а) $f'(x)=-\dfrac{5x^4y+y^5}{x^5+5xy^4}$, б) $f'(x)=\dfrac{\sin(x+y)-e^{x+y}+2xy^3}{e^{x+y}-\sin(x+y)-3x^2y^2}$. **5.** Так, $f'_x=\dfrac{x}{2-z}$, $f'_y=\dfrac{y}{2-z}$. **6.** а) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y+2y^2z-3yz^2}{4z^3+6xyz-2xy^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x+2y+4xyz-3xz^2}{4z^3+6xyz-2xy^2}$; б) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{z}{x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{z}{y}$. **7.** $f(x,y)=-2-3(y+1)+(x-1)^2-2(x-1)(y+1)+3(y+1)^2$. **8.** $e^x\sin y\approx y+xy$.

Завдання для самостійної роботи. 1. а) $z'=\dfrac{2}{t}$; б) $z'=2te^{t^2}$. **2.** а) $z'_u=-\dfrac{v}{u^2+v^2}$, $z'_v=\dfrac{u}{u^2+v^2}$; б) $z'_u=-\dfrac{2v^2}{u^3}+e^{uv}\left(\dfrac{v^2}{u}-\dfrac{v}{u^2}\right)$, $z'_v=\dfrac{2v}{u^2}+e^{uv}\left(\dfrac{1}{u}+v\right)$. **3.** Так, $f'(x,y)=\dfrac{2ye^{2xy}-2xe^y-y^2e^x}{x^2e^y+2ye^x-2xe^{2xy}}$. **4.** а) $f'(x,y)=\dfrac{3y^3-4y}{12x-15xy^2}$; б) $f'(x,y)=-\dfrac{\cos(x+y)+2xye^{x^2y}-y^3}{\cos(x+y)+x^2e^{x^2y}-3xy^2}$. **5.** Так, $f'_x=\dfrac{yz}{z^2-xy}$, $f'_y=\dfrac{xz}{z^2-xy}$. **6.** а) $z'_x=\dfrac{y-yz^2e^{xy}}{5z^4+2ze^{xy}}$, $z'_y=\dfrac{x+2y-xz^2e^{xy}}{5z^4+2ze^{xy}}$; б)

$z'_x = -\dfrac{\left(10xy^2z^2 + 2yz\right)\left(x+y+z\right)-1}{\left(10x^2y^2z + 2xy\right)\left(x+y+z\right)-1}$, $z'_y = -\dfrac{\left(10x^2yz^2 + 2xz\right)\left(x+y+z\right)-1}{\left(10x^2y^2z + 2xy\right)\left(x+y+z\right)-1}$. **7.** $f(x,y) = 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2$. **8.** $\ln(1+x+2y) \approx x + 2y - \dfrac{1}{2}x^2 - 2xy - 2y^2$.

Додаткові завдання. **1.** $d^2z = \dfrac{2}{a}dxdy$. **2**. $d^2z = -31,5dx^2 + 206dxdy - 306dy^2$.

4. $z \approx 1 + (x-1) + \dfrac{1}{4}(y-1) - \dfrac{1}{8}(x-1)(y-1) + \dfrac{9}{64}(y-1)^2$

ТЕМА 6. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Теоретичні питання

1. Рівняння дотичної площини до поверхні. Рівняння нормалі.
2. Поняття про точки локального екстремума й екстремум функції двох змінних.
3. Необхідна умова існування локального екстремума. Стаціонарні точки.
4. Достатня умова існування екстремума функції двох змінних.
5. Найбільше й найменше значення функції двох змінних.
6. Умовний екстремум.

Література:

1. Шкіль М.І. Математичний аналіз: Підручник. У 2-х ч. Ч.2. 3-є видання, переробл. і доп. Київ: Вища школа. 2005. 510 с. С. 73-181. Режим доступу: https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Shkil_P2_2005_510.pdf
2. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: Підручник: У 2-х ч. Ч. 2. Київ: Либідь. 2003. 304 с. С. 50-73. Режим доступу: https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Dorogovtsev_P2_1994_304.pdf
3. Lebl J. Basic Analysis II: Introduction to Real Analysis, Volume II. Oklahoma: Jiří Lebl / University of Oklahoma. 2024. 244 p. P. 131–190. Режим доступу: https://www.jirka.org/ra/realanal2.pdf

Повторити: 1. Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора.
2. Канонічне рівняння прямої в просторі.
3. Правило дослідження функції однієї змінної на екстремум.
4. Найбільше й найменше значення неперервної функції на відрізку.
5. Способи дослідження функції однієї змінної на умовний екстремум.

Основні теоретичні відомості

Поверхня задана рівнянням $F(x,y,z)=0$, точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ належить поверхні, функція $u=F(x,y,z)$ диференційовна в точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $\left(F'_x(M_0)\right)^2+\left(F'_y(M_0)\right)^2+\left(F'_z(M_0)\right)^2\neq 0$	Рівняння дотичної площини $F'_x(M_0)\left(x-x_0\right)+F'_y(M_0)\left(y-y_0\right)+F'_z(M_0)\left(z-z_0\right)=0$ Рівняння нормалі $\dfrac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\dfrac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\dfrac{z-z_0}{F'_z(M_0)}$
Поверхня задана рівнянням $z=f(x,y)$, точка $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ належить поверхні, функція $z=f(x,y)$ диференційовна в точці $M_1(x_0,y_0,0)$, $\left(f'_x(M_1)\right)^2+\left(f'_y(M_1)\right)^2\neq 0$	Рівняння дотичної площини $f'_x(M_1)\left(x-x_0\right)+f'_y(M_1)\left(y-y_0\right)-\left(z-z_0\right)=0$ Рівняння нормалі $\dfrac{x-x_0}{f'_x(M_1)}=\dfrac{y-y_0}{f'_y(M_1)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$
Нехай $z=f(x,y)$, $D(f)=D\subset R_2$, $(x_0,y_0)\in D$. Якщо для будь-якої точки (x,y) із δ-околу точки (x_0,y_0), крім точки (x_0,y_0), виконується нерівність $f(x,y)>f(x_0,y_0)$ ($f(x,y)<f(x_0,y_0)$), то точка (x_0,y_0) називається точкою локального мінімума (максимума) функції $z=f(x,y)$. Значення функції в точці локального мінімума (максимума) називається локальним мінімумом (максимумом) функції.	
Необхідна умова існування екстремума. Якщо точка $(x_0,y_0)\in D$ є точкою локального екстремума функції $z=f(x,y)$ і в цій точці існують частинні похідні $f'_x(x_0,y_0)$ і $f'_y(x_0,y_0)$, то ці похідні дорівнюють нулю.	$\begin{cases} f'_x(x_0,y_0)=0, \\ f'_y(x_0,y_0)=0 \end{cases}$ Розв'язки цієї системи, які належать області визначення функції $z=f(x,y)$, називаються стаціонарними точками.
Достатня умова існування екстремума. Нехай для функції $z=f(x,y)$ виконуються умови: 1) точка (x_0,y_0) – стаціонарна точка функції; 2) в δ-околі точки (x_0,y_0) функція має неперервні частинні похідні до другого порядку включно. Тоді: 1) якщо $\Delta(x_0,y_0)=f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot f''_{yy}(x_0,y_0)-\left(f''_{xy}(x_0,y_0)\right)^2>0$, то точка (x_0,y_0) є точкою екстремума функції, а саме точкою максимума, якщо $f''_{xx}(x_0,y_0)<0$, і точкою мінімума, якщо $f''_{xx}(x_0,y_0)>0$; 2) якщо $\Delta(x_0,y_0)<0$, то точка (x_0,y_0) не є точкою	Схема дослідження функції двох змінних на екстремум 1. Знайдіть область визначення функції $z=f(x,y)$. 2. Знайдіть частинні похідні 1-го порядку, прирівняйте їх до нуля, складіть і розв'яжіть систему $\begin{cases} f'_x(x_0,y_0)=0, \\ f'_y(x_0,y_0)=0 \end{cases}$ 3. Знайдіть частинні похідні другого порядку, обчисліть їхні значення в знайдених стаціонарних точках, для кожної стаціонарної точки обчисліть $\Delta(x_0,y_0)=f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot f''_{yy}(x_0,y_0)-\left(f''_{xy}(x_0,y_0)\right)^2$. 4. Застосуйте достатню умову існування екстремума функції.

<table>
<tr><td>екстремума функції.</td><td>5. Обчисліть значення функції в точках екстремума.
6. Запишіть відповідь.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Схема знаходження найбільшого (найменшого) значення функції
Нехай функція $z = f(x,y)$ визначена і неперервна в замкненій обмеженій області $\overline{D} \subset R_2$.
1. Знайдіть стаціонарні точки функції $z = f(x,y)$, які належать області D (внутрішні точки області)
2. Обчисліть значення функції в цих точках.
3. Знайдіть найбільше (найменше) значення функції на межі області (якщо воно існує).
4. Серед обчислених значень виберіть найбільше (найменше) значення.
5. Запишіть відповідь.</td></tr>
<tr><td>Умовний екстремум: знайти екстремум функції $z = f(x,y)$ за умови $\varphi(x,y) = 0$.</td><td>Рівняння $\varphi(x,y) = 0$ називають рівнянням зв'язку.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Метод Лагранжа.
1. Запишіть функцію Лагранжа $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$.
2. Знайдіть стаціонарні точки функції Лагранжа, розв'язавши систему $\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda) = f'_x(x,y) + \lambda\varphi'_x(x,y) = 0, \\ L'_y(x,y,\lambda) = f'_y(x,y) + \lambda\varphi'_y(x,y) = 0, \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) = \varphi'_x(x,y) = 0. \end{cases}$
Розв'язки цієї системи точки називаються стаціонарними точками функції Лагранжа.
3. Знайдіть частинні похідні 2-го порядку функції Лагранжа і обчисліть їхнє значення в стаціонарних точках.
4. Запишіть повний диференціал другого порядку функції Лагранжа в стаціонарних точках. Якщо $d^2L(x_0,y_0,\lambda_0) > 0$ (за умови $\varphi(x_0,y_0) = 0$), то точка (x_0,y_0) є точкою умовного мінімума функції $z = f(x,y)$; якщо $d^2L(x_0,y_0,\lambda_0) < 0$ (за умови $\varphi(x_0,y_0) = 0$), то точка (x_0,y_0) є точкою умовного максимума функції $z = f(x,y)$.
5. Обчисліть значення функції $z = f(x,y)$ в точці умовного екстремума.
6. Запишіть відповідь.</td></tr>
</table>

Навчальні завдання

✍ Приклад 1. Запишіть рівняння дотичної площини і рівняння нормалі до заданих поверхонь у вказаних точках: а) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $M_0\left(1;1;\dfrac{\pi}{4}\right)$; б) $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$, $M_0\left(1;2;-1\right)$.

○ а) Знайдемо частинні похідні 1-го порядку функції $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, обчислимо їхні значення в точці (1; 1) і застосуємо формули $f'_x(M_1)\left(x - x_0\right) + f'_y(M_1)\left(y - y_0\right) - \left(z - z_0\right) = 0$ та $\dfrac{x - x_0}{f'_x(M_1)} = \dfrac{y - y_0}{f'_y(M_1)} = \dfrac{z - z_0}{-1}$. $z'_x = \dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\left(-\dfrac{y}{x^2}\right) =$ $= -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$, $z'_x(1;1) = -\dfrac{1}{2}$; $z'_y = \dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $z'_y(1;1) = \dfrac{1}{2}$. Тоді рівняння дотичної площини $-\dfrac{1}{2}\left(x - 1\right) + \dfrac{1}{2}\left(y - 1\right) - \left(z - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$ або після спрощення $x - y + 2z - \dfrac{\pi}{2} = 0$. Рівняння нормалі $\dfrac{x - 1}{-\frac{1}{2}} = \dfrac{y - 1}{\frac{1}{2}} = \dfrac{z - \frac{\pi}{4}}{-1}$.

б) Тут функція $z = z(x,y)$ задана неявно. Тому застосуємо формули $\dfrac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \dfrac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \dfrac{z - z_0}{F'_z(M_0)}$ і $F'_x(M_0)\left(x - x_0\right) + F'_y(M_0)\left(y - y_0\right) + F'_z(M_0)\left(z - z_0\right) = 0$, де $F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6$. Тоді $F'_x(x,y,z) = 3x^2 + yz$, $F'_y(x,y,z) = 3y^2 + xz$, $F'_z(x,y,z) = 3z^2 + xy$. Обчислимо значення похідних в заданій точці: $F'_x(1;2;-1) = 3 - 2 = 1$, $F'_y(1;2;-1) = 12 - 1 = 11$, $F'_z(1;2;-1) = 3 + 2 = 5$. Рівняння дотичної площини $\left(x - 1\right) + 11\left(y - 2\right) + 5\left(z + 2\right) = 0$ або після спрощення $x + 11y + 5z - 13 = 0$. Рівняння нормалі $\dfrac{x - 1}{1} = \dfrac{y - 2}{11} = \dfrac{z + 1}{5}$.

✍ Приклад 2. Дослідіть функцію $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ на екстремум.

○ Область визначення функції R_2. Знайдемо частинні похідні: $z'_x = 6x^2 + y^2 + 10x$, $z'_y = 2xy + 2y$. Знайдемо стаціонарні точки як розв'язки системи $\begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0, \\ 2xy + 2y = 0. \end{cases}$ Перепишемо друге рівняння: $2y(x+1) = 0$. Тоді записану систему перепишемо як сукупність двох систем: $\begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$ або $\begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0, \\ x = -1. \end{cases}$. Розв'яжемо кожну систему окремо. $\begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 + 10x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ або } x = -\dfrac{5}{3}, \\ y = 0. \end{cases}$ Тут отримали дві точки: $M_1(0;0)$, $M_2(-\frac{5}{3};0)$. $\begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0, \\ x = -1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 - 4 = 0, \\ x = -1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2 \text{ або } y = 2, \\ x = -1. \end{cases}$ Отже. маємо ще дві точки $M_3(-1;-2)$ і $M_4(-1;2)$.

Таким чином, маємо чотири стаціонарні точки: $M_1(0;0)$, $M_2(-\frac{5}{3};0)$, $M_3(-1;-2)$, $M_4(-1;2)$. Запишемо частинні похідні другого порядку: $z''_{xx} = 12x + 10$, $z''_{xy} = 2y$, $z''_{yy} = 2x + 2$. Дослідимо кожну стаціонарну точку окремо.

1) $M_1(0;0)$, $z''_{xx}(M_1) = 10$, $z''_{xy}(M_1) = 0$, $z''_{yy}(M_1) = 2$; $\Delta(M_1) = z''_{xx}(M_1)z''_{yy}(M_1) - \left(z''_{xy}(M_1)\right)^2 = 10 \cdot 2 - 0^2 = 20$. Оскільки $\Delta(M_1) > 0$, то точка $M_1(0;0)$ є точкою екстремума, а саме точкою мінімума, бо $z''_{xx}(M_1) = 10 > 0$.

2) $M_2(-\frac{5}{3};0)$, $z''_{xx}(M_2) = 12 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) + 10 = -10$, $z''_{xy}(M_2) = 0$, $z''_{yy}(M_2) = -\frac{10}{3} + 2 = -\frac{4}{3}$; $\Delta(M_2) = -10 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - 0^2 = \frac{40}{3}$. Оскільки $\Delta(M_2) > 0$, то точка $M_2(-\frac{5}{3};0)$ є точкою екстремума, а саме точкою максимума, бо $z''_{xx}(M_2) = -10 < 0$.

3) $M_3(-1;-2)$, $z''_{xx}(M_3) = -2$, $z''_{xy}(M_3) = -4$, $z''_{yy}(M_3) = 0$; $\Delta(M_3) = -2 \cdot 0 - (-4)^2 = -16$. Оскільки $\Delta(M_3) < 0$, то точка $M_3(-1;-2)$ не є точкою екстремума.

4) $M_4(-1;2)$, $z''_{xx}(M_4) = -2$, $z''_{xy}(M_4) = 4$, $z''_{yy}(M_4) = 0$; $\Delta(M_4) = -2 \cdot 0 - (4)^2 = -16$. Оскільки $\Delta(M_4) < 0$, то точка $M_4(-1;2)$ не є точкою екстремума.

Отже, функція $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ має дві точки екстремума: $M_1(0;0)$ – точка мінімума; $M_2(-\frac{5}{3};0)$ – точка максимума. Тоді $z_{\min} = z(0;0) = 0$, $z_{\max} = z(-\frac{5}{3};0) = 2\left(-\frac{5}{3}\right)^3 + 0 + 5\left(-\frac{5}{3}\right)^2 + 0 = -\frac{250}{9} + \frac{125}{27} = -\frac{625}{27}$.

✍ Приклад 3. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - y^2$ в крузі $x^2 + y^2 \le 4$.

○Функція $z = x^2 - y^2$ визначена на R_2. Знайдемо стаціонарні точки: $z'_x = 2x$, $z'_y = -2y$; $\begin{cases} 2x = 0, \\ -2y = 0, \end{cases}$ тоді (0; 0) – стаціонарна точка. Вона належить кругу. Обчислимо значення функції в цій точці: $z(0;0) = 0^2 - 0^2 = 0$. Дослідимо функцію на межі області – на колі $x^2 + y^2 = 4$. Виразимо з рівняння кола y^2 ($y^2 = 4 - x^2$) і підставимо у функцію $z = x^2 - (4 - x^2)$, $x \in [-2;2]$ або $z = 2x^2 - 4$, $x \in [-2;2]$. Маємо неперервну функцію однієї змінної $z = 2x^2 - 4$, яка задана на відрізку $x \in [-2;2]$. Застосуємо відому схему. $z' = 4x$, $4x = 0, x = 0$. Точка 0 належить відрізку. Тоді $z(0) = -4$, $z(-2) = 4$, $z(2) = 4$. Об'єднаємо результати дослідження. $z(0;0) = 0$; якщо $x = 0$, то $y^2 = 4 - 0^2 = 4$, тобто маємо дві точки (0; -2) і (0; 2), $z(0;-2) = z(0;2) = -4$; якщо $x = -2$ або $x = 2$, то $y^2 = 0$, тобто $y = 0$, $z(-2;0) = z(2;0) = 4$. Отже, найбільше значення функції $z = x^2 - y^2$ в крузі $x^2 + y^2 \le 4$ буде 4, а найменше буде – 4: $\max\limits_{x^2+y^2 \le 4} z(x,y) = z(-2;0) = z(2;0) = 4$, $\min\limits_{x^2+y^2 \le 4} z(x,y) = z(0;-2) = z(0;4) = -4$. На рис. 6.1а зображено поверхню $z = x^2 - y^2$. Точка (0; 0) є стаціонарною точкою типу «сідло» (локальний екстремум відсутній). На рис. 6.1б червоною лінією виокремлено поведінку функції на межі області, де досягаються найбільше (z = 4) та найменше (z = – 4) значення.

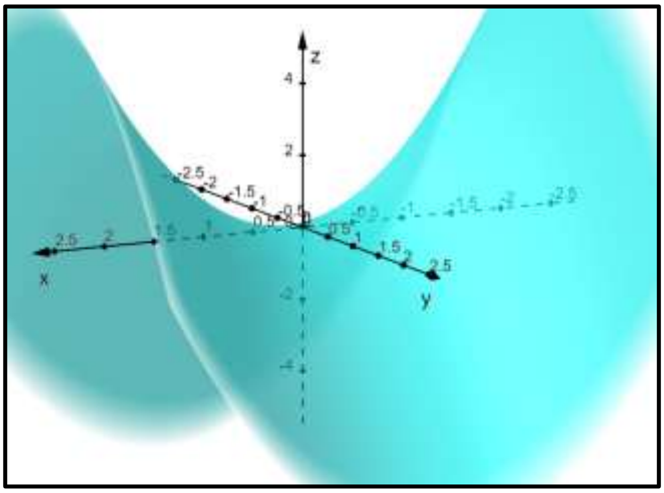


Рис. 6.1а. Графік функції $z = x^2 - y^2$

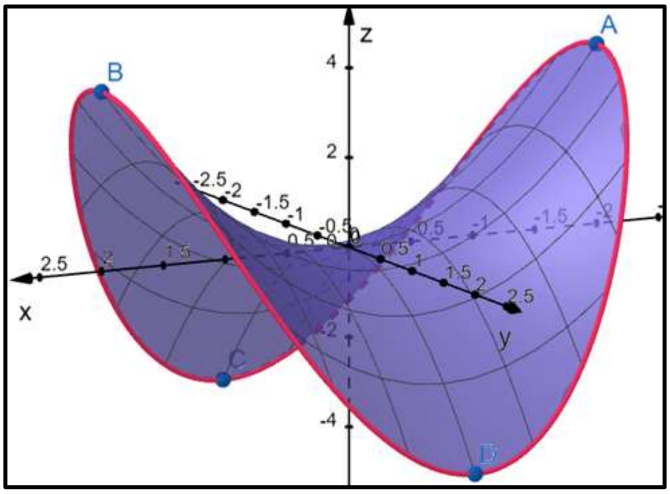


Рис. 6.1б. Графік функції $z = x^2 - y^2$ в області $x^2 + y^2 \le 4$

✍ <u>Приклад 4</u>. Дослідіть функцію $z = x - y$ на екстремум, якщо $x^2 + y^2 = 1$.

○ Це задача знаходження умовного екстремума функції. Запишемо функцію Лагранжа і знайдемо її стаціонарні точки. Функція Лагранжа $L(x, y, \lambda) = x - y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$, її частинні похідні $L'_x(x, y, \lambda) = 1 + 2\lambda x$, $L'_y(x, y, \lambda) = -1 + 2\lambda y$, $L'_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 1$. Складемо і розв'яжемо систему $\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0, \\ -1 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0, \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2\lambda}, \\ y = \dfrac{1}{2\lambda}, \\ \left(-\dfrac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2\lambda}\right)^2 - 1 = 0. \end{cases}$ З останнього рівняння $\lambda^2 = 2$, тобто $\lambda_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\lambda_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Враховуючи перші два рівняння, знаходимо дві стаціонарні точки функції Лагранжа: $M_1\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $M_2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Обчислимо частинні похідні другого порядку функції Лагранжа. $L''_{xx}(x, y, \lambda) = 2\lambda$, $L''_{yy}(x, y, \lambda) = 2\lambda$, $L''_{xy}(x, y, \lambda) = 0$.

1) $M_1\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, тоді $L''_{xx}(M_1) = -\dfrac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$, $L''_{xy}(M_1) = 0$, $L''_{yy}(M_1) = -\dfrac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$. Повний диференціал другого порядку $d^2L(M_1) = L''_{xx}(M_1)dx^2 + 2L''_{xy}(M_1)dxdy + L''_{yy}(M_1)dy^2 = -\sqrt{2}dx^2 - \sqrt{2}dy^2 = -\sqrt{2}(dx^2 + dy^2)$. Оскільки $d^2L(M_1) < 0$, то точка $M^*_1\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ є точкою умовного максимума функції $z = x - y$, $z_{\max\ ум} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

2) $M_2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, тоді $L''_{xx}(M_2) = \sqrt{2}$, $L''_{xy}(M_2) = 0$, $L''_{yy}(M_2) = \sqrt{2}$. Повний диференціал другого порядку $d^2L(M_2) = L''_{xx}(M_2)dx^2 + 2L''_{xy}(M_2)dxdy + L''_{yy}(M_2)dy^2 = \sqrt{2}dx^2 + \sqrt{2}dy^2 = \sqrt{2}(dx^2 + dy^2)$. Оскільки $d^2L(M_1) > 0$, то точка $M^*_2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ є точкою умовного мінімума функції $z = x - y$, $z_{\min\ ум} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$. На рис. 6.2а зображено графік функції $z = x - y$, який є площиною. Зрозуміло, що така функція не має екстремумів. На рис.6.2б враховано умову $x^2 + y^2 = 1$ (геометрично – це циліндр). Циліндр перетинає площину по еліпсу і тут т. A відповідає умовному максимуму, а т. B – умовному мінімуму.

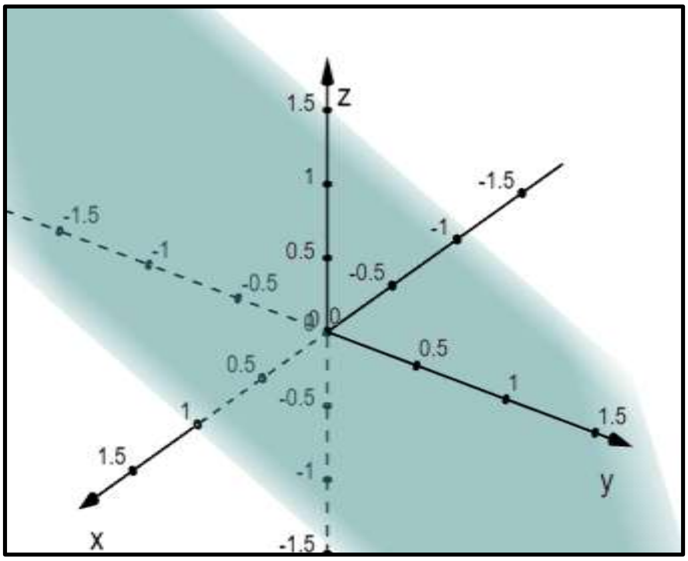


Рис. 6.2а. Графік функції $z = x - y$

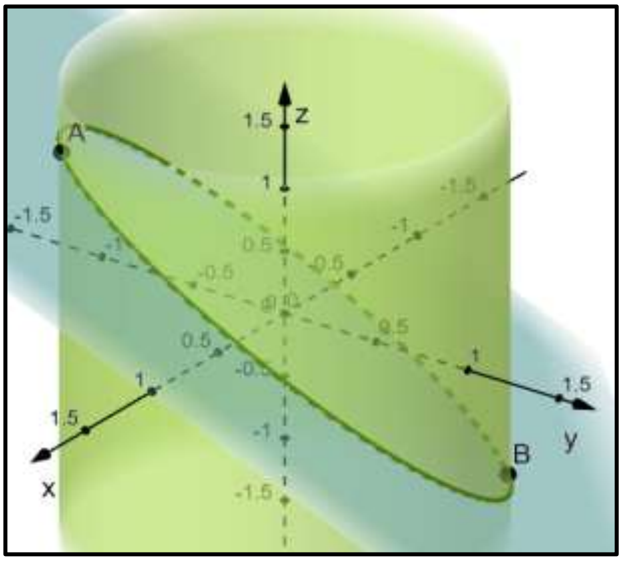


Рис.6.2б. Геометрична інтерпретація умовного екстремума

Завдання для аудиторної роботи

✍ 1. Запишіть рівняння дотичної площини і рівняння нормалі до заданих поверхонь у вказаних точках: а) $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 6$, $M_0(1;1;1)$; б) $z = 2x^2 + y^2$, $M_0(-1;-1;3)$. Зробіть рисунок (можна використати GeoGebra 3D).

✍ 2. Дослідіть вказані функції на екстремум: а) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$; б) $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$. Зробіть рисунок (можна використати GeoGebra 3D), позначте (якщо існують) точки екстремума, екстремум функції.

✍ 3. Знайдіть найбільше та найменше значення вказаних функції у заданих областях: а) $z = x^2 - y^2$ в квадраті, обмеженому лініями $x = -1, x = 1, y = -1, y = 1$; б) $z = xy$ в трикутнику, обмеженому лініями $x = 0, y = 0, x + y = 1$.

✍ 4. Дослідіть функцію $z = 2x + y$ на екстремум, якщо $x^2 + y^2 = 4$.

Завдання для самостійної роботи

✍ 1. Запишіть рівняння дотичної площини і рівняння нормалі до заданих поверхонь у вказаних точках: а) $x^2 + 2y^2 - z^2 = 2$, $M_0(-1;1;1)$; б) $z = -x^2 + 3y^2$, $M_0(1;1;2)$. Зробіть рисунок (можна використати GeoGebra 3D).

✍ 2. Дослідіть вказані функції на екстремум: а) $z = x^3 + y^3 - 3x - 3y$; б) $z = x^2 + 3y^2 - 2\ln x - 6\ln y + 5$. Зробіть рисунок (можна використати GeoGebra 3D), позначте (якщо існують) точки екстремума, екстремум функції.

✍ 3. Знайдіть найбільше та найменше значення вказаних функції у заданих областях: а) $z = x^2 + y^2$ в трикутнику, обмеженому лініями $x = 0, y = 0, x + y = 5$; б) $z = 2x + 3y$ в прямокутнику, обмеженому лініями $x = 0, x = 1, y = -1, y = 2$

✍ 4. Дослідіть функцію $z = x^2 + y^2$ на екстремум, якщо $x + y = 4$.

Додаткові завдання

1. Знайдіть стаціонарні точки функції $z = xy(a - x - y)$.
2. Запишіть додатне число a у вигляді суми трьох невід'ємних доданків так, щоб їхній добуток був найбільшим.
3. Дослідіть функцію $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ на екстремум, якщо $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4}$.
4. У кулю радіуса R впишіть прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму.
5. Знайдіть найбільше й найменше значення функції $z = e^{-x^2-y^2}(2x^2 + 3y^2)$ в крузі $x^2 + y^2 \le 4$.

Відповіді. Завдання для аудиторної роботи. 1. а) $3x + 2y + z - 6 = 0$, $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}$; б) $4x + 2y + z + 3 = 0$, $\frac{x+1}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{1}$. **2.** а) $z_{\min} = z(-1;-1) = -1$; б) $z_{\min} = z(-2;0) = -\frac{2}{e}$. **3.** а) $\max\limits_{(x,y)\in D} z(x, y) = z(-1;0) = z(1;0) = 1$,

$\min\limits_{(x,y)\in D} z(x,y) = z(0;-1) = z(0;1) = -1$; б) $\max\limits_{(x,y)\in D} z(x,y) = z\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$, $\min\limits_{(x,y)\in D} z(x,y) = 0$ на сторонах $x=0$, $y=0$. **4.** $z_{\max\, ум} = z\left(\frac{4}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 2\sqrt{5}$, $z_{\min\, ум} = z\left(-\frac{4}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -2\sqrt{5}$.

Завдання для самостійної роботи. **1.** а) $x-2y+z+2=0$, $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1}$; б) $2x-6y+z+2=0$, $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-6} = \frac{z-2}{1}$. **2**. а) $z_{\min} = z(1;1) = -4$; $z_{\max} = z(-1;-1) = 4$, б) $z_{\min} = z(1;1) = 9$. **3.** а) $\max\limits_{(x,y)\in D} z(x,y) = z(0;5) = z(5;0) = 25$, $\min\limits_{(x,y)\in D} z(x,y) = z(0;0) = 0$; б) $\max\limits_{(x,y)\in D} z(x,y) = z(1;2) = 8$, $\min\limits_{(x,y)\in D} z(x,y) = z(0;-1) = -3$. **4.** $z_{\min\, ум} = z(2;2) = 8$.

Додаткові завдання. **1.** (0;0), (0;a), (a;0), $\left(\frac{a}{3};\frac{a}{3}\right)$. **2.** Кожен із доданків дорівнює $\frac{a}{3}$. **3.** $z_{\min\, ум} = z\left(-2\sqrt{2};-2\sqrt{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_{\max\, ум} = z\left(2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **4.** Куб, ребро якого дорівнює $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. *Вказівка:* розгляньте задачу як задачу на умовний екстремум функції трьох змінних, яка виражає об'єм прямокутного паралелепіпеда, а рівняння зв'язку – умова, що прямокутний паралелепіпед вписано в кулю. **5.** $\max\limits_{(x,y)\in D} z(x,y) = z(0;1) = z(0;-1) = \frac{3}{e}$, $\min\limits_{(x,y)\in D} z(x,y) = z(0;0) = 0$.

ТЕМА 7. ЕЛЕМЕНТИ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Теоретичні питання

1. Поняття скалярного поля.
2. Похідна за напрямом.
3. Градієнт функції та його властивості.

Література:

1. Шкіль М.І. Математичний аналіз: Підручник. У 2-х ч. Ч.2. 3-є видання, переробл. і доп. Київ: Вища школа. 2005. 510 с. С. 73-181. Режим доступу: https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Shkil_P2_2005_510.pdf
2. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: Підручник: У 2-х ч. Ч. 2. Київ: Либідь. 2003. 304 с. С. 50-73. Режим доступу: https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Dorogovtsev_P2_1994_304.pdf
3. Lebl J. Basic Analysis II: Introduction to Real Analysis, Volume II. Oklahoma: Jiří Lebl / University of Oklahoma. 2024. 244 p. P. 131–190. Режим доступу: https://www.jirka.org/ra/realanal2.pdf

Повторити: 1. Поняття ліній рівня, поверхонь рівня.
2. Напрямні кути й напрямні косинуси вектора.
3. Скалярний добуток векторів. Умова ортогональності векторів.

Основні теоретичні відомості

Скалярне поле – область простору, кожній точці P якого поставлено у відповідність єдине значення деякої скалярної величини $F(P)$.
Якщо функція $F(P)$ не залежить від часу, то скалярне поле називають стаціонарним.
Якщо область є плоскою, то скалярне поле називають плоским.
Нехай задано просторове скалярне поле $u = F(P)$ і вектор $\vec{S}$. Похідна за напрямом $\vec{S}$: $$\frac{\partial u}{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$ де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – напрямі косинуса вектора $\vec{S}$.
Якщо скалярне поле плоске, то $\frac{\partial u}{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha$
Вектор $\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$ називають градієнтом функції $u = u(x, y, z)$ і позначають $\operatorname{grad} u$. $$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$
1. Градієнт у точці M перпендикулярний до лінії (на площині) або поверхні (у просторі) рівня, що проходить через цю точку.   2. Градієнт в кожній точці скалярного поля спрямований у бік найшвидшого зростання скалярного поля.   3. Модуль градієнта дорівнює максимальній швидкості зміни функції в даній точці.   4. Похідна скалярного поля за напрямом вектора $\vec{S}$ дорівнює проєкції градієнта на вектор $\vec{S}$.

Навчальні завдання

✍ <u>Приклад 1</u>. Обчисліть похідну функції $u = x^2 + 2y^2 + 1$ за напрямом вектора $\overrightarrow{AD}$ в точці *A*, якщо $A(1;1)$, $D(2;-1)$.

○Застосуємо формулу $\frac{\partial u}{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha$. Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{AD}$ (це і є напрям S) і його напрямні косинуси. $\overrightarrow{AD} = (2-1; -1-1) = (1; -2)$, $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$. Знайдемо частинні похідні функції $u = x^2 + 2y^2 + 1$ і обчислимо їхні значення в точці $A(1;1)$. $u'_x = 2x$, $u'_y = 4y$, $u'_x(A) = 2\cdot 1 = 2$, $u'_y(A) = 4$. Тоді $\frac{\partial u}{\partial S}(A) = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + 4\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{6}{\sqrt{5}}$. На рис. 7.1 показано геометричний зміст похідної за напрямом. Для цього побудовано графік функції $u = x^2 + 2y^2 + 1$ (параболоїд), напрям S (вектор $\overrightarrow{AD}$), точці *A* на поверхні відповідає точка *C*. Через точку *C* проведено січну площину, яка паралельна вектору $\overrightarrow{AD}$. Перетин площини й поверхні – парабола (синім кольором). У січній площині до параболи в точці *C* проведено дотичну (зеленим кольором). Тоді похідна за напрямом – це кутовий коефіцієнт дотичної до кривої, що утворюється перетином поверхні площиною, яка проходить через цю точку в заданому напрямку. На рис. 7.1 – це кут α . Тоді $\frac{\partial u}{\partial S}(A)=\operatorname{tg}\alpha$. Фізичний зміст – абсолютне значення похідної за напрямомдорівнює швидкості зміни функції у заданій точці (тут – у точці *A*) при русі в напрямі вектора $\overrightarrow{AD}$. Знак похідної вказує на характер зміни: якщо $\frac{\partial u}{\partial S}(A)>0$, то функція в цьому напрямі зростає, якщо $\frac{\partial u}{\partial S}(A)<0$ - спадає. У цій задачі функція $u=x^2+2y^2+1$ в точці $A(1;1)$ у напрямі вектора $\overrightarrow{AD}$ спадає зі швидкістю $\frac{6}{\sqrt{5}}\approx 2,68$.

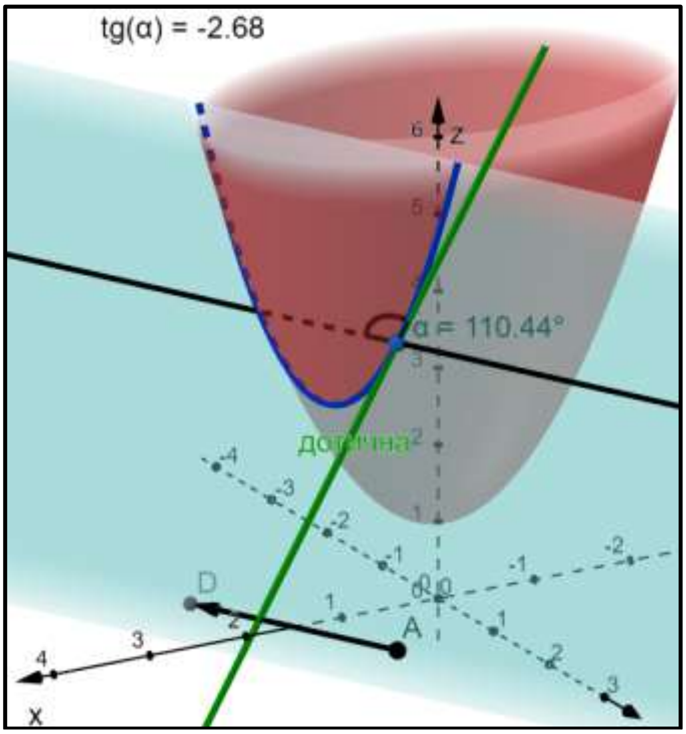


Рис. 7.1. Геометричний зміст похідної функції $u=x^2+2y^2+1$ в точці $A(1;1)$ у напрямі вектора $\overrightarrow{AD}$

✍ Приклад 2. Обчисліть похідну функції $u=x^2+y^2+z^2$ за напрямом вектора $\overrightarrow{AD}$ в точці *A*, якщо $A(1;1;3)$, $D(3;4;4)$.

○ Застосуємо формулу $\frac{\partial u}{\partial S}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$, де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – напрямі косинуса вектора $\vec{S}$. Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{AD}$ (це і є напрям $\vec{S}$) і його напрямні косинуси. $\overrightarrow{AD}=(3-1;4-1;4-3)=(2;3;1)$, $\left|\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{2^2+3^2+1^2}=\sqrt{14}$, $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{14}}$, $\cos\beta=\frac{3}{\sqrt{14}}$, $\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{14}}$. Знайдемо частинні похідні функції $u=x^2+y^2+z^2$ і обчислимо їхні значення в точці $A(1;1;3)$. $u'_x=2x$, $u'_y=2y$, $u'_z=2z$, $u'_x(A)=2\cdot1=2$, $u'_y(A)=2\cdot1=2$, $u'_z=2\cdot3=6$. Тоді $\frac{\partial u}{\partial S}(A)=2\cdot\frac{2}{\sqrt{14}}+2\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}+6\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}=\frac{16}{\sqrt{14}}$.

✍ Приклад 3. Обчисліть похідну функції $u=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$ за напрямом вектора $\vec{S}$, який утворює кути 45^0 і 60^0 з додатними напрямами осей *Ox* і *Oy* відповідно, а з віссю *Oz* – гострий кут γ .

○ Нагадаємо, що для напрямних косинусів вектора виконується рівність $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. Знаючи, що $\alpha=45^0$, $\beta=60^0$, знайдемо $\cos\gamma$: $\cos^2\gamma=1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta=1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$. За умовою кут γ гострий, тому $\cos\gamma>0$. Тоді $\cos\gamma=\frac{1}{2}$. Знайдемо частинні похідні функції $u=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$ в довільній точці:

$u'_x = \dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2}$, $u'_y = \dfrac{2y}{x^2+y^2+z^2}$, $u'_z = \dfrac{2z}{x^2+y^2+z^2}$. Тоді $\dfrac{\partial u}{\partial S} = \dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{2y}{x^2+y^2+z^2}\cdot\dfrac{1}{2} + \dfrac{2z}{x^2+y^2+z^2}\cdot\dfrac{1}{2} =$
$= \dfrac{x\sqrt{2}+y+z}{x^2+y^2+z^2}$.

✍ <u>Приклад 4</u>. Обчисліть $\operatorname{grad} u$ в довільній точці, якщо: а) $u = x\sin y + \cos(xy)$; б) $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

○ а) Застосуємо формулу $\operatorname{grad} u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\vec{j}$. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \sin y - y\sin(xy)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x\cos y - x\sin(xy)$. Тоді $\operatorname{grad} u =$
$= \left(\sin y - y\sin(xy)\right)\vec{i} + \left(x\cos y - x\sin(xy)\right)\vec{j}$ або $\operatorname{grad} u = \left(\left(\sin y - y\sin(xy)\right), \left(x\cos y - x\sin(xy)\right)\right)$.

б) Застосуємо формулу $\operatorname{grad} u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
Тоді $\operatorname{grad} u = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{i} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{j} + \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{k}$.

✍ <u>Приклад 5</u>. Знайдіть напрям найшвидшої зміни функції $u = e^{x^2+y^2+z^2}$ в точці $A(1;1;1)$. Знайдіть швидкість цієї зміни.

○ Оскільки напрям найшвидшої зміни функції – це напрям градієнта, то обчислимо його для заданої функції в точці $A(1;1;1)$. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2+z^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2+z^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = 2ze^{x^2+y^2+z^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(A) = 2\cdot 1\cdot e^{1^2+1^2+1^2} = 2e^3$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}(A) = 2e^3$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}(A) = 2e^3$. Отже, напрям найшвидшої зміни функції в точці $A(1;1;1)$ – це $(2e^3, 2e^3, 2e^3)$, швидкість зміни дорівнює $\left|\operatorname{grad} u(A)\right|$, тобто $\left|\operatorname{grad} u(A)\right| = \sqrt{(2e^3)^2+(2e^3)^2+(2e^3)^2} = 2e^3\sqrt{2}$.

✍ <u>Приклад 6</u>. Обчисліть градієнт функції $z = 3 - x^2 - y^2$ в точці $A(1;1)$. Порівняйте напрям градієнта із розташуванням ліній рівня.

○Знайдемо частинні похідні функції $z = 3 - x^2 - y^2$ і обчислимо їхнє значення в точці $A(1;1)$. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -2x$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -2y$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}(A) = -2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(A) = -2$. Отже, $\operatorname{grad} z(A) = (-2;-2)$. На рис. 7.2 точка $A(1;1)$ і $\operatorname{grad} z(A)$ знаходяться у площині *XOY*, $\operatorname{grad} z(A)$ (червоним кольором) не спрямований «вгору» вздовж поверхні у просторі, а вказує на площині той напрям, уздовж якого функція зростає найшвидше. На рисунку ми бачимо, що вектор $(-2;-2)$ вказує на початок координат – саме там знаходиться проєкція вершини параболоїда. Лінія рівня, яка зображена зеленим кольором у площині *XOY*, проходить через точку $A(1;1)$. Це коло радіуса $\sqrt{2}$. Градієнт $(-2;-2)$ лежить на тій самій прямій, що й радіус кола, а отже, він перпендикулярний до дотичної до цього кола в точці $A(1;1)$. Довжина градієнта $\left|\operatorname{grad} z(A)\right| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2}$ – це максимальна швидкість зростання функції в цій точці.

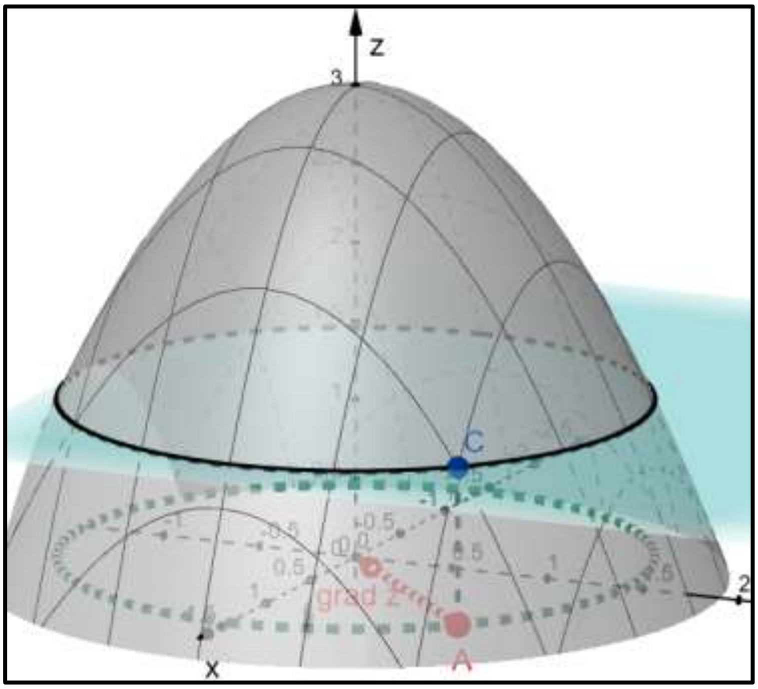


Рис. 7.2. Градієнт і лінія рівня функції $z = 3 - x^2 - y^2$

➢ Градієнт скалярного поля завжди перпендикулярний до лінії рівня, що проходить через дану точку. У середовищі GeoGebra це можна перевірити візуально, побудувавши вектор $\operatorname{grad} z$ та дотичну до лінії рівня: кут між ними завжди становитиме 90° (детально – у Додатку Г).

Завдання для аудиторної роботи

✍ № 1. Обчисліть похідну функції $u = e^{x^2+y^2+1}$ за напрямом вектора $\overrightarrow{AD}$ в точці *A*, якщо $A(0;-1)$, $D(-3;1)$.

✍ № 2. Обчисліть похідну функції $u = \ln(x^2 + 2y^4 + 3z^3)$ за напрямом вектора $\overrightarrow{AD}$ в точці *A*, якщо $A(1;2;3)$, $D(3;2;1)$.

✍ № 3. Обчисліть похідну функції $u = x^2 + 2^{y^2+z^2}$ за напрямом вектора $\vec{S}$, який утворює кути 45^0 і 60^0 з додатними напрямами осей *Oy* і *Oz* відповідно, а з віссю *Ox* – тупий кут α.

✍ № 4. Обчисліть $\operatorname{grad} u$ в заданій точці, якщо: а) $u = \ln\left(x + \dfrac{y}{2x}\right)$, $A(1;2)$; б) $u = (\sin x)^{yz}$, $A\left(\dfrac{\pi}{2};2;3\right)$; в) $u = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x}$, $A(1;1;1)$.

✍ № 5. Знайдіть напрям найшвидшої зміни функції $u = \ln(1 + x + y^2 + z^3)$ в точці $A(1;1;1)$. Знайдіть швидкість цієї зміни.

Завдання для самостійної роботи

✍ № 1. Обчисліть похідну функції $u = \sin(x^2y^3 + \pi)$ за напрямом вектора $\overrightarrow{AD}$ в точці *A*, якщо $A(0;-1)$, $D(-3;1)$.

✍ № 2. Обчисліть похідну функції $u = \ln(xy + yz + xz)$ за напрямом вектора $\overrightarrow{AD}$ в точці *A*, якщо $A(-1;-2;-3)$, $D(1;2;-1)$.

✍ № 3. Обчисліть похідну функції $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ за напрямом вектора $\vec{S}$, який утворює кути 60^0 і 30^0 з додатними напрямами осей *Ox* і *Oz* відповідно.

✍ № 4. Обчисліть $\operatorname{grad} u$ в заданій точці, якщо: а) $u = e^{y + \frac{y}{2x}}$, $A(1;1)$; б) $u = x^y + 3xyz$, $A(2;2;-4)$; в) $u = x - 2y + e^z$, $A(-4;-5;0)$.

✍ № 5. Знайдіть напрям найповільнішої зміни функції $u = \operatorname{arctg}(xyz)$ в точці $A(1;1;1)$. Знайдіть швидкість цієї зміни.

Додаткові завдання

Дослідіть поведінку функції $z = f(x, y)$ у точці $A(x_0;\ y_0)$ за різними напрямами. Оберіть один із варіантів для виконання:

Варіант 1: $z = 10 - x^2 - y^2$, $A(1;\ 1)$.

Варіант 2: $z = x^2 - y^2$, $A(1;\ 2)$.

Програма дослідження:

1. **Векторний аналіз**

- Обчисліть градієнт $\mathrm{grad}\, z$ у точці A.
- Знайдіть антиградієнт $-\mathrm{grad}\, z$ у точці A та вкажіть його напрям відносно рельєфу поверхні.

2. **Обчислення швидкості зміни за напрямами:**

Знайдіть похідну в точці A за напрямом, який:

- а) збігається з додатним напрямом осі Ox;
- б) збігається з додатним напрямом осі Oy;
- в) збігається із градієнтом;
- г) збігається із антиградієнтом;
- д) перпендикулярний до градієнта;
- е) від точки A до початку координат $O(0;\ 0)$.

3. **Аналітичний підсумок:**

- Порівняйте результати пунктів а) та б) із значеннями частинних похідних $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$.
- За яким із напрямів (в) – е)) відбувається найшвидший підйом, а яким – найшвидший спуск?
- Поясніть, чому в пункті д) результат близький або дорівнює нулю.

4. **Візуалізація в GeoGebra 3D:**

- Побудуйте графік обраної поверхні.
- Покажіть точку C на поверхні, проекцією якої на площину XOY є точка A.
- Побудуйте градієнт та лінію рівня, яка проходить через точку A. Переконайтеся в їхній ортогональності.

Відповіді. Завдання для аудиторної роботи. 1. $\frac{\partial u}{\partial S}(A) = \frac{-4e^2}{\sqrt{13}}$. **2.** $\frac{\partial u}{\partial S}(A) = \frac{-79}{114\sqrt{2}}$. **3.** $-x + 2^{y^2+z^2} \ln 2(y\sqrt{2} + z)$. 4. а) $\mathrm{grad}\, u(A) = \left(0; \frac{1}{4}\right)$; б) $\mathrm{grad}\, u(A) = (0;0;0)$; в) $\mathrm{grad}\, u(A) = (0;0;0)$. **5.** $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$, $\frac{\sqrt{14}}{4}$.

Завдання для самостійної роботи. 1. $\frac{\partial u}{\partial S}(A) = 0$. **2.** $\frac{\partial u}{\partial S}(A) = \frac{-16}{11\sqrt{6}}$. **3.** $\frac{\partial u}{\partial S} = \frac{y^2 + z^2 - x^2 - 2\sqrt{3}xz}{2\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}$. **4.** а) $\mathrm{grad}\, u(A) = \left(-\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}; \frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}}\right)$; б) $\mathrm{grad}\, u(A) = (-20; 4\ln 2 - 24; 12)$; в) $\mathrm{grad}\, u(A) = (1;-2;1)$. **5.** $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Додаткові завдання. Варіант 1. 1. $\mathrm{grad}\, u(A) = (-2;-2)$; $-\mathrm{grad}\, u(A) = (2;2)$. **2.** а) – 2; б) – 2; в) $2\sqrt{2}$; г) $-2\sqrt{2}$; д) 0; е) $2\sqrt{2}$. **Варіант 2. 1.** $\mathrm{grad}\, u(A) = (2;-4)$; $-\mathrm{grad}\, u(A) = (-2;4)$. **2.** а) 2; б) – 4; в) $2\sqrt{5}$; г) $-2\sqrt{2}$; д) 0; е) $\frac{6}{\sqrt{5}}$.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Запишіть і зобразіть область визначення функції. Перевірте побудову за допомогою GeoGebra.

1.1. $z=\dfrac{3xy}{\sqrt{x-2y}}$

1.2. $z=\arcsin(x-y)$

1.3. $z=\sqrt{x^2-y^2}$

1.4. $z=\ln(4-x^2-y^2)$

1.5. $z=\dfrac{5}{6-x^2-y^2}$

1.6. $z=\sqrt{x^2+y^2-5}$

1.7. $z=\arccos(x+y)$

1.8. $z=\dfrac{3x+y}{\sqrt{2-x+y}}$

1.9. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$

1.10. $z=\ln(x^2+y^2-4)$

1.11. $z=\sqrt{4x^2-9y^2}$

1.12. $z=\dfrac{3x-4y}{\sqrt{2-4x+y}}$

1.13. $z=\dfrac{\sqrt{xy}}{x^2+y^2}$

1.14. $z=\arcsin(2x-3y)$

1.15. $z=\ln(x^2+y^2-6)$

1.16. $z=\dfrac{x+y}{\sqrt{3+x-y}}$

1.17. $z=e^{\ln(xy)}$

1.18. $z=\cos(\ln(x^2+y^2-3))$

1.19. $z=\sqrt{x^2-y^2-4}$

1.20. $z=\dfrac{3x-4y}{\sqrt{2-x^2-y^2}}$

2. Знайдіть частинні похідні і диференціали першого порядку заданих функцій.

2.1. $z=\ln(y^2-e^{-x})$

2.2. $z=\arcsin\sqrt{xy}$

2.3. $z=\mathrm{arctg}(x^2+y^2)$

2.4. $z=\cos(x^3+2xy)$

2.5. $z=\sin\sqrt{\dfrac{y}{x^3}}$

2.6. $z=\mathrm{tg}(x^3+y^3)$

2.7. $z=\mathrm{ctg}(xy^3)$

2.8. $z=e^{-x^2+y^2}$

2.9. $z=\ln(3x^2-y^4)$

2.10. $z=\arccos\left(\dfrac{x}{y}\right)$

2.11. $z=\mathrm{arcctg}(xy^2)$

2.12. $z=\cos\sqrt{x^2+y^2}$

2.13. $z=\sin\sqrt{x-y^3}$

2.14. $z=\mathrm{tg}\left(x^3y^4\right)$

2.15. $z=\mathrm{ctg}\left(x^3-y^4\right)$

2.16. $z=e^{2x^2-y^5}$

2.17. $z=\ln(x^2+y^2-6xy)$

2.18. $z=\arcsin(2x^2-3y^2)$

2.19. $z=\sqrt{9-5x^2-4y^2}$

2.20. $z=5^{-2x^2+3y^2}$

3. Обчисліть значення частинних похідних першого порядку заданих функцій у вказаній точці.

3.1. $u=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $A(0;-1;1)$

3.2. $u=\ln\left(x+\dfrac{y}{2z}\right)$, $A(1;2;1)$

3.3. $u=(\sin x)^{yz}$, $A\left(\dfrac{\pi}{6};1;2\right)$

3.4. $u=\ln(x^3+2y^3-z^3)$, $A(2;1;0)$

3.5. $u=\dfrac{x}{\sqrt{z^2+y^2}}$, $A(1;0;1)$

3.6. $u=\ln\cos(x^2y^2+z)$, $A\left(0;0;\dfrac{\pi}{4}\right)$

3.7. $u=\sqrt{x+y^2+z^3}$, $A(3;4;2)$

3.8. $u=\operatorname{arctg}(xy^2+z)$, $A(2;1;0)$

3.9. $u=\arcsin\left(\frac{x}{y^2}+z\right)$, $A(2;5;0)$

3.10. $u=\sqrt{z}\sin\left(\frac{y}{x}\right)$, $A(2;0;4)$

3.11. $u=\frac{y}{\sqrt{x^2+z^2}}$, $A(-1;1;0)$

3.12. $u=\operatorname{arctg}\left(\frac{xz}{y^2}\right)$, $A(2;1;1)$

3.13. $u=\ln\sin\left(x-2y+\frac{z}{4}\right)$, $A\left(1;\frac{1}{2};\pi\right)$

3.14. $u=\frac{y}{z}+\frac{z}{y}-\frac{x}{z}$, $A(1;1;2)$

3.15. $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-z^2}}$, $A(1;2;2)$

3.16. $u=\ln(+y^2)-\sqrt{x^2z^2}$, $A(5;2;3)$

3.17. $u=\operatorname{arctg}(xzy^2)$, $A(1;1;1)$

3.18. $u=e^{x+y^2+z^3}$, $A(-1;1;0)$

3.19. $u=\ln\sin(x^2y^2+z)$, $A\left(0;0;\frac{\pi}{4}\right)$

3.20. $u=\arcsin\left(\frac{x^2}{y}+z\right)$, $A(-2;5;0)$

4. Запишіть повний диференціал першого порядку для заданих функцій.

4.1. $z=2x^3y-4xy^5$

4.2. $z=6x^3y^2+4xy^5-xy+5$

4.3. $z=-2xy^2+4x^3y^5+3xy-7x$

4.4. $z=x^4y^3-xy^5+3xy+6y$

4.5. $z=-4x^4y+4x^4y^5-x^2y+5y$

4.6. $z=\frac{1}{4}x^4y^4+xy^3-5xy+5x-9$

4.7. $z=\frac{5}{6}x^3y^2+x^2y^3-xy+5$

4.8. $z=x^5y^3-xy^5-3xy+7y$

4.9. $z=6-x^3y^2+\frac{2}{3}xy^4-x^2y-x-y$

4.10. $z=-7x^5y^6+4x^2y^5-3xy$

4.11. $z=\frac{3}{12}x^3y^2-x^3y^5-xy+5x$

4.12. $z=6x^2y^3+4x^4y^5$

4.13. $z=4x^3y^5-7xy+5x-4y+4$

4.14. $z=6x^5y^3+4xy^5-\frac{1}{3}x^3y+8x$

4.15. $z=-5x^2y^4+x^4y^5-3xy+5x$

4.16. $z=5x^3y^2-x^3y^5-3xy+7$

4.17. $z=6x^2y^8-4x^3y^5-5xy+7y$

4.18. $z=16x^3y^2-4x^5y^5-y+9x$

4.19. $z=-x^5y^2+4x^3y^5-x^8y+2x$

4.20. $z=26xy+14x^2y^5+xy+4x$

5. Обчисліть значення похідної складеної функції $u=u(x,y)$, де $x=x(t),\ y=y(t)$, в точці $t=t_0$.

5.1. $u=e^{x-2y},\ x=\sin t,\ y=t^3,\ t_0=0$

5.2. $u=\ln(e^x+e^{-y}),\ x=t^2,\ y=t^3,\ t_0=-1$

5.3. $u=y^x,\ x=\ln(t-1),\ y=e^{\frac{t}{2}},\ t_0=2$

5.4. $u=e^{y-2x+2},\ x=\sin t,\ y=\cos t,\ t_0=\frac{\pi}{2}$

5.5. $u=x^2e^y,\ x=\cos t,\ y=\sin t,\ t_0=\pi$

5.6. $u=\ln(e^x+e^y),\ x=t^2,\ y=t^3,\ t_0=1$

5.7. $u=x^y,\ x=e^t,\ y=\ln t,\ t_0=1$

5.8. $u=e^{y-2x},\ x=\sin t,\ y=t^3,\ t_0=0$

5.9. $u=x^2e^{-y},\ x=\sin t,\ y=\sin^2 t,\ t_0=\frac{\pi}{2}$

5.10. $u=\ln(e^{-x}+e^y),\ x=t^2,\ y=t^3,\ t_0=-1$

5.11. $u=e^{y-2x-1},\ x=\sin t,\ y=\cos t,\ t_0=\frac{\pi}{2}$

5.12. $u=\arcsin\left(\frac{x}{y}\right),\ x=\sin t,\ y=\cos t,\ t_0=\pi$

5.13. $u=\arccos\left(\frac{2x}{y}\right),\ x=\sin t,\ y=\cos t,\ t_0=\pi$

5.14. $u=\frac{x^2}{y+1},\ x=1-2t,\ y=\operatorname{arctg} t,\ t_0=0$

5.15. $u=\frac{x}{y},\ x=e^t,\ y=2-e^{2t},\ t_0=0$

5.16. $u=\ln(e^{-x}+e^{-2y}),\ x=t^2,\ y=\frac{1}{3}t^3,\ t_0=1$

5.17. $u=e^{-3x+2y},\ x=\sin t,\ y=\frac{2}{3}t^3,\ t_0=0$

5.18. $u=x^3e^{-3y},\ x=\cos t,\ y=\cos^2 t,\ t_0=\frac{\pi}{4}$

5.19. $u = x^{2y},\ x = e^{-t},\ y = \ln t,\ t_0 = 1$

5.20. $u = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right),\ x = \sin t,\ y = \cos t,\ t_0 = \pi$

6. Обчисліть значення частинних похідних першого порядку функції $z = z(x, y)$, заданої неявно, у вказаній точці *A*.

6.1. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4,\ A(2;1;1)$

6.2. $x^2 + y^2 + z^2 - xy = 2,\ A(-1;0;1)$

6.3. $x^2 + z^3 + 3x - 3xyz = 5,\ A(-2;1;-1)$

6.4. $2x - 3y^3 - 3xy + 4z = 4,\ A(1;0;1)$

6.5. $x^2 + y^2 + z^2 - 3xz = 4,\ A(0;1;1)$

6.6. $z^3 - 3xyz - 5x = 4,\ A(-1;0;1)$

6.7. $x^3 + 3z^3 - 3xyz + 5z = 4,\ A(0;1;1)$

6.8. $x^2 + y^2 + z^2 - x - y = 6,\ A(-1;1;1)$

6.9. $x^2 + y^3 + z^2 - xy + xz = 4,\ A(0;0;-1)$

6.10. $x^2 + y^2 + z^2 - 3xz + 2yxz = 4,\ A(1;1;1)$

6.11. $2x^2 - y^3 - 3xyz + 4z - 5y = 4,\ A(1;0;1)$

6.12. $3x + 4y - 3y^3 - 3xy + 4z = 1,\ A(1;2;1)$

6.13. $y^3 - 3xyz - 5z + 2x = 4,\ A(-1;1;1)$

6.14. $2x^3 + y^3 - 3xyz + 4z - x = 3,\ A(-1;0;1)$

6.15. $x + 3z - 3xyz + 5z^2 = 4x,\ A(-1;1;1)$

6.16. $2x^3 + 3z^3 - xyz + 5y - 3x = 2,\ A(1;1;1)$

6.17. $x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 4x - 5y = 6,\ A(1;1;1)$

6.18. $x^2 - 2y^3 - 4xyz + 4x - 5y = 4,\ A(1;1;1)$

6.19. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 7xy + 8z = 2,\ A(-1;1;1)$

6.20. $3z + y - 3y^3 - 3xyz + 4z - x = 1,\ A(1;1;1)$

7. Перевірте, чи задовольняє вказана функція $z = z(x, y)$ задане рівняння.

7.1. $z(x,y) = \dfrac{y}{x},\ x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

7.2. $z(x,y) = \ln\dfrac{x}{y} + x^3 - y^3,\ x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3(x^3 - y^3)$

7.3. $z(x,y) = \ln(x^2 + (y+1)^2),\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

7.4. $z(x,y) = x^y,\ y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (1 + y\ln x)\dfrac{\partial z}{\partial x}$

7.5. $z(x,y) = \dfrac{xy}{x+y},\ x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2z$

7.6. $z(x,y) = e^{xy},\ x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

7.7. $z(x,y) = \sin^2(x - ay),\ a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

7.8. $z(x,y) = y\sqrt{\dfrac{y}{x}},\ x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

7.9. $z(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

7.10. $z(x,y) = e^{-\cos(x+ay)},\ a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

7.11. $z(x,y) = (x - y)^2,\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

7.12. $z(x,y) = x\ln\dfrac{y}{x},\ x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$

7.13. $z(x,y) = \ln(x^2 + y^2),\ y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$

7.14. $z(x,y) = \dfrac{y^3}{3x} + \arcsin(xy),\ x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} - xy\dfrac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$

7.15. $z(x,y) = e^{xy},\ x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2xy$

7.16. $z(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$

7.17. $z(x,y) = y(x^2 - y^2),\ \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$

7.18. $z(x,y) = \dfrac{x-y}{x},\ 2x\dfrac{\partial z}{\partial x} + x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

7.19. $z(x,y) = ye^x,\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$

7.20. $z(x,y) = xe^y,\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

8. Дослідіть функцію на екстремум. У програмному середовищі GeoGebra побудуйте поверхню, яка задана вказаною функцією, вкажіть на ній точки, які відповідають точкам екстремума (якщо такі існують).

8.1. $z(x,y) = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y$

8.2. $z(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$

8.3. $z(x,y)=1+15x-2x^2-xy-2y^2$

8.4. $z(x,y)=1+6x-x^2-xy-y^2$

8.5. $z(x,y)=x^3+y^2-6xy-39x+18y$

8.6. $z(x,y)=2x^3+2y^3-6xy+5$

8.7. $z(x,y)=3x^3+3y^3-9xy+5$

8.8. $z(x,y)=90+15x-2x^2-xy-2y^2$

8.9. $z(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$

8.10. $z(x,y)=6(x-y)-3x^2-3y^2$

8.11. $z(x,y)=x^2+xy+y^2-6x-9y+20$

8.12. $z(x,y)=(x-2)^2+2y^2-5$

8.13. $z(x,y)=(x-5)^2+y^2+1$

8.14. $z(x,y)=x^3+y^3-3xy$

8.15. $z(x,y)=2xy-2x^2-4y^2$

8.16. $z(x,y)=x\sqrt{y}-x^2-y+6x-12$

8.17. $z(x,y)=2xy-3x^2-2y^2$

8.18. $z(x,y)=xy+x^2+y^2+x-y$

8.19. $z(x,y)=xy-x^2-2y^2$

8.20. $z(x,y)=x^3+y^3-3xy+1$

9. Дослідіть функцію $z=z(x,y)$ на умовний екстремум. У GeoGebra побудуйте поверхню, яка задана вказаною функцією, лінію умови $\varphi(x,y)=0$, лінію перетину циліндричної поверхні $\varphi(x,y)=0$ і поверхні $z=z(x,y)$, позначте знайдені точки.

9.1. $z=x^2+y^2,\ x+y-2=0$

9.2. $z=x+2y,\ x^2+y^2-5=0$

9.3. $z=xy,\ x+y-1=0$

9.4. $z=x^2-y^2,\ y-x^2=0$

9.5. $z=3x+4y,\ x^2+y^2-25=0$

9.6. $z=x^2+xy+y^2,\ x+y-4=0$

9.7. $z=2x^2+y^2,\ x+2y-9=0$

9.8. $z=x+y,\ x^2+y^2-2=0$

9.9. $z=xy^2,\ x+2y-1=0$

9.10. $z=x^2+y^2,\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}-1=0$

9.11. $z=1-x^2-y^2,\ x+y-1=0$

9.12. $z=e^{xy},\ x+y-2=0$

9.13. $z=x^2+3xy,\ x+y-5=0$

9.14. $z=5-2x^2-y^2,\ x+y-3=0$

9.15. $z=2x+2,\ x^2+y^2-1=0$

9.16. $z=(x-1)^2+(y-2)^2,\ y+x-10=0$

9.17. $z=xy,\ x^2+y^2-8=0$

9.18. $z=4x-y,\ x^2-y^2-15=0$

9.19. $z=x^2+y^2,\ xy-4=0$

9.20. $z=3x+y,\ x^2+y^2-10=0$

10. Для функції $z=f\left(x,y\right)$ знайдіть градієнт $\operatorname{grad} z\left(A\right)$, обчисліть похідну в точці *A* за напрямом вектора $\overrightarrow{AB}$, запишіть рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці *A*, запишіть рівняння лінії рівня, що проходить через точку *A*. В GeoGebra побудуйте поверхню, дотичну площину, градієнт та лінію рівня.

10.1. $z=x^2+2y^2,\ A(1;1),\ B(4;5)$

10.2. $z=x^2+xy+y^2,\ A(1;0),\ B(3;4)$

10.3. $z=4-x^2-y^2,\ A(1;1),\ B(0;0)$

10.4. $z=\sqrt{x^2+y^2},\ A(3;4),\ B(6;8)$

10.5. $z=xy,\ A(2;3),\ B(5;7)$

10.6. $z=x^2-y^2,\ A(2;1),\ B(5;5)$

10.7. $z=\ln\left(x+y^2\right),\ A(1;1),\ B(2;3)$

10.8. $z=e^{x-y},\ A(2;2),\ B(5;6)$

10.9. $z=2x^2+3y^2,\ A(1;1),\ B(2;3)$

10.10. $z=\operatorname{atctg}\left(\frac{y}{x}\right),\ A(1;1),\ B(4;5)$

10.11. $z=10-x^2-2y^2,\ A(2;1),\ B(0;0)$

10.12. $z=\sqrt{25-x^2-y^2},\ A(3;0),\ B(0;4)$

10.13. $z=x^2y,\ A(1;2),\ B(3;4)$

10.14. $z=\sin(x+y),\ A\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right),\ B(\pi;\pi)$

10.15. $z=x^3+y^3-3xy,\ A(2;1),\ B(0;0)$

10.16. $z=\ln\left(x^2+y\right),\ A(0;1),\ B(2;2)$

10.17. $z=\frac{x}{y},\ A(4;2),\ B(1;1)$

10.18. $z=\sqrt{xy},\ A(1;4),\ B(3;2)$

10.19. $z=5x^2-3xy,\ A(1;0),\ B(2;1)$

10.20. $z=(x-1)^2+y^2,\ A(2;1),\ B(5;5)$

ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. **Запишіть і зобразіть область визначення функції** $z=\dfrac{5x-3y}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$**. Перевірте побудову за допомогою GeoGebra.**

○ Оскільки обчислювати радикали парних степенів на множині дійних чисел можна тільки з невід'ємних чисел, ділення на 0 не визначено у множині дійсних чисел, то $x^2+y^2-4>0$. Отже, область визначення вказаної функції – множина точок координатної площини, що задовольняє нерівність $x^2+y^2>4$ (див. рис.1)

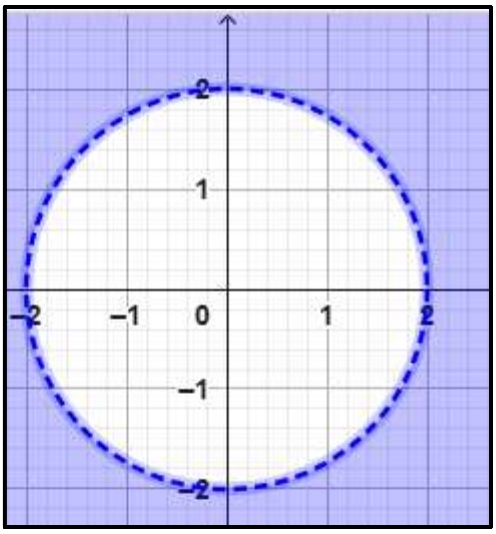


Рис. 1. Область визначення функції $z=\dfrac{5x-3y}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$

2. **Знайдіть частинні похідні і диференціали першого порядку функції** $z=\operatorname{arctg}(e^{2x^2-3y^2})$.

○ Функція є суперпозицією 3-х функцій: $u=2x^2-3y^2,\ v=e^u,\ z=\operatorname{arctg}v$. Тоді $z'_x=\dfrac{1}{1+v^2}\cdot e^u\cdot u'_x=$

$$=\frac{1}{1+e^{2\left(2x^2-3y^2\right)}}\cdot e^{2x^2-3y^2}\cdot 4x=\frac{4xe^{2x^2-3y^2}}{1+e^{2\left(2x^2-3y^2\right)}},\qquad z'_y=\frac{1}{1+v^2}\cdot e^u\cdot u'_y==\frac{1}{1+e^{2\left(2x^2-3y^2\right)}}\cdot e^{2x^2-3y^2}\cdot(-6y)=\frac{-6ye^{2x^2-3y^2}}{1+e^{2\left(2x^2-3y^2\right)}}.$$

Частинні диференціали: $d_xz=\dfrac{4xe^{2x^2-3y^2}}{1+e^{2\left(2x^2-3y^2\right)}}dx$, $d_yz=\dfrac{-6ye^{2x^2-3y^2}}{1+e^{2\left(2x^2-3y^2\right)}}dy$.

3. **Обчисліть значення частинних похідних першого порядку функції** $u=\ln\cos(x^2+y^2+z)$ **у точці** $A\left(0;0;\dfrac{\pi}{4}\right)$**.**

○ Обчислимо частинні похідні першого порядку, враховуючи, що функція $u=\ln\cos(x^2+y^2+z)$ є суперпозицією трьох функцій. Тоді: $u'_x=\dfrac{1}{\cos(x^2+y^2+z)}\cdot(-\sin(x^2+y^2+z))\cdot 2x=-\dfrac{2x\sin(x^2+y^2+z)}{\cos(x^2+y^2+z)}=$

$=-2x\operatorname{tg}(x^2+y^2+z)$, $\quad u'_y=\dfrac{1}{\cos(x^2+y^2+z)}\cdot(-\sin(x^2+y^2+z))\cdot 2y=-\dfrac{2y\sin(x^2+y^2+z)}{\cos(x^2+y^2+z)}=-2y\operatorname{tg}(x^2+y^2+z)$,

$u'_z=\dfrac{1}{\cos(x^2+y^2+z)}\cdot(-\sin(x^2+y^2+z))\cdot 1=-\dfrac{\sin(x^2+y^2+z)}{\cos(x^2+y^2+z)}=-\operatorname{tg}(x^2+y^2+z)$. Обчислимо значення цих частинних похідних в точці $A\left(0;0;\dfrac{\pi}{4}\right)$: $u'_x(A)=-2\cdot 0\cdot\operatorname{tg}\left(0^2+0^2+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$, $u'_y(A)=-2\cdot 0\cdot\operatorname{tg}\left(0^2+0^2+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$,

$u'_x(A)=-\operatorname{tg}\left(0^2+0^2+\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$. Отже, $u'_x(A)=0$, $u'_y(A)=0$, $u'_x(A)=-1$.

4. **Запишіть повний диференціал першого порядку для функції** $z = 5x^3y^2 - x^3y^5 - 3xy + 7$ **.**

o Повний диференціал першого порядку функції двох змінних має вигляд $dz = z'_x dx + z'_y dy$. Маємо: $z'_x = 15x^2y^2 - 3x^2y^5 - 3y$, $z'_y = 10x^3y - 5x^3y^4 - 3x$. Тоді $dz = \left(15x^2y^2 - 3x^2y^5 - 3y\right)dx + \left(10x^3y - 5x^3y^4 - 3x\right)dy$.

5. **Обчисліть значення похідної складеної функції** $u = y^x$ **, де** $x = \ln t,\ y = e^{-t}$ **, в точці** $t_0 = 1$.

o Застосуємо формулу $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dt}$. Обчислимо її складові. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y^x \ln y$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = xy^{x-1}$, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{t}$, $\dfrac{dy}{dt} = -e^{-t}$. Тоді $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dt} = y^x \ln y \cdot \dfrac{1}{t} + xy^{x-1}\cdot\left(-e^{-t}\right) = \left(e^{-t}\right)^{\ln t}\ln\left(e^{-t}\right)\cdot\dfrac{1}{t} + \ln t\cdot\left(e^{-t}\right)^{\ln t - 1}\cdot\left(-e^{-t}\right)$.

Обчислимо значення для $t_0 = 1$: $\dfrac{du}{dt}(1) = \left(e^{-1}\right)^{\ln 1}\ln\left(e^{-1}\right)\cdot\dfrac{1}{1} + \ln 1\cdot\left(e^{-1}\right)^{\ln 1 - 1}\cdot\left(-e^{-1}\right) = 1\cdot(-1)\cdot 1 + 0 = -1$.

6. **Обчисліть значення частинних похідних першого порядку функції** $z = f(x, y)$**, заданої неявно рівнянням** $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 7xy + 8z = 2,$ **, у точці** $A(-1;1;1)$ **.**

o Застосуємо формули $f'_x(x, y) = -\dfrac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}$, $f'_y(x, y) = -\dfrac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}$, де $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 7xy + 8z - 2$. Тоді $F'_x(x, y, z) = 2x - 7y$, $F'_y(x, y, z) = 4y - 7x$, $F'_z(x, y, z) = 6z + 8$. Обчислимо значення цих частинних похідних в точці $A(-1;1;1)$. $F'_x(-1,1,1) = 2\cdot(-1) - 7\cdot 1 = -9$, $F'_y(-1,1,1) = 4\cdot 1 - 7\cdot(-1) = 11$, $F'_z(-1,1,1) = 6\cdot 1 + 8 = 14$. Маємо, що $f'_x = -\dfrac{F'_x(-1,1,1)}{F'_z(-1,1,1)} = \dfrac{9}{14}$, $f'_y(-1,1) = -\dfrac{F'_y(-1,1,1)}{F'_z(-1,1,1)} = -\dfrac{11}{14}$.

7. **Перевірте, чи задовольняє функція** $z(x, y) = y(x^2 - y^2)$ **рівняння** $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$ **.**

o Знайдемо частинні похідні функції $z(x, y) = y(x^2 - y^2)$, які входять до заданого рівняння. Спростимо задану функцію: $z(x, y) = y(x^2 - y^2)$ або $z(x, y) = yx^2 - y^3$. Тоді $z'_x(x, y) = 2yx$, $z'_y(x, y) = x^2 - 3y^2$. Підставимо в рівняння: $\dfrac{1}{x}\cdot 2xy + \dfrac{1}{y}\left(x^2 - 3y^2\right) = 2y + \dfrac{x^2}{y} - 3y = \dfrac{x^2 - y^2}{y} = \dfrac{y(x^2 - y^2)}{y^2} = \dfrac{z}{y^2}$. Отже, задана функція задовольняє задане рівняння.

8. **Дослідіть функцію** $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 100$ **на екстремум. У програмному середовищі GeoGebra побудуйте поверхню, яка задана вказаною функцією, вкажіть на ній точки, які відповідають точкам екстремума (якщо такі існують).**

o Область визначення заданої функції – R_2. Знайдемо частинні похідні 1-го порядку: $z'_x = 3x^2 - 6y - 39$, $z'_y = 2y - 6x + 18$. Для знаходження стаціонарних точок функції складемо й розв'яжемо систему: $\begin{cases} 3x^2 - 6y - 39 = 0, \\ 2y - 6x + 18 = 0. \end{cases}$ Поділимо 1-е рівняння на 3, 2-ге на 2, з 2-го рівняння виразимо змінну y через x і підставимо в 1-е. Маємо: $\begin{cases} x^2 - 2(3x - 9) - 13 = 0, \\ y = 3x - 9, \end{cases}$ або $\begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0, \\ y = 3x - 9. \end{cases}$ Тоді точки $M_1(1;-6)$ і $M_2(5;6)$ – стаціонарні точки. Знайдемо частинні похідні 2-го порядку: $z''_{xx} = 6x$, $z''_{xy} = -6$, $z''_{yy} = 2$. Обчислимо їхні значення в стаціонарних точках. 1) $M_1(1;-6)$, $z''_{xx}(M_1) = 6\cdot 1 = 6$, $z''_{xy}(M_1) = -6$, $z''_{yy}(M_1) = 2$. Тоді $\Delta(M_1) = z''_{xx}(M_1)\cdot z''_{yy}(M_1) - \left(z''_{xy}(M_1)\right)^2 = = 6\cdot 2 - (-6)^2 = -24$. Оскільки $\Delta(M_1) < 0$, то точка $M_1(1;-6)$ не є точкою екстремума. 2) $M_2(5;6)$, $z''_{xx}(M_2) = 6\cdot 5 = 30$, $z''_{xy}(M_2) = -6$, $z''_{yy}(M_2) = 2$. Тоді $\Delta(M_2) = z''_{xx}(M_2)\cdot z''_{yy}(M_2) - \left(z''_{xy}(M_2)\right)^2 = = 30\cdot 2 - (-6)^2 = 24$. Оскільки $\Delta(M_2) > 0$, то точка $M_2(5;6)$ є точкою екстремума, а саме точкою мінімума, бо $z''_{xx}(M_2) = 30 > 0$.

Обчислимо мінімум функції: $z_{\min} = z(5;6) = 5^3 + 6^2 - 6\cdot 5\cdot 6 - 39\cdot 5 + 18\cdot 6 + 100 = -6$. Отже, задана функція має екстремум, який досягається нею в точці $(5;6)$ і дорівнює -6 (рис. 2).

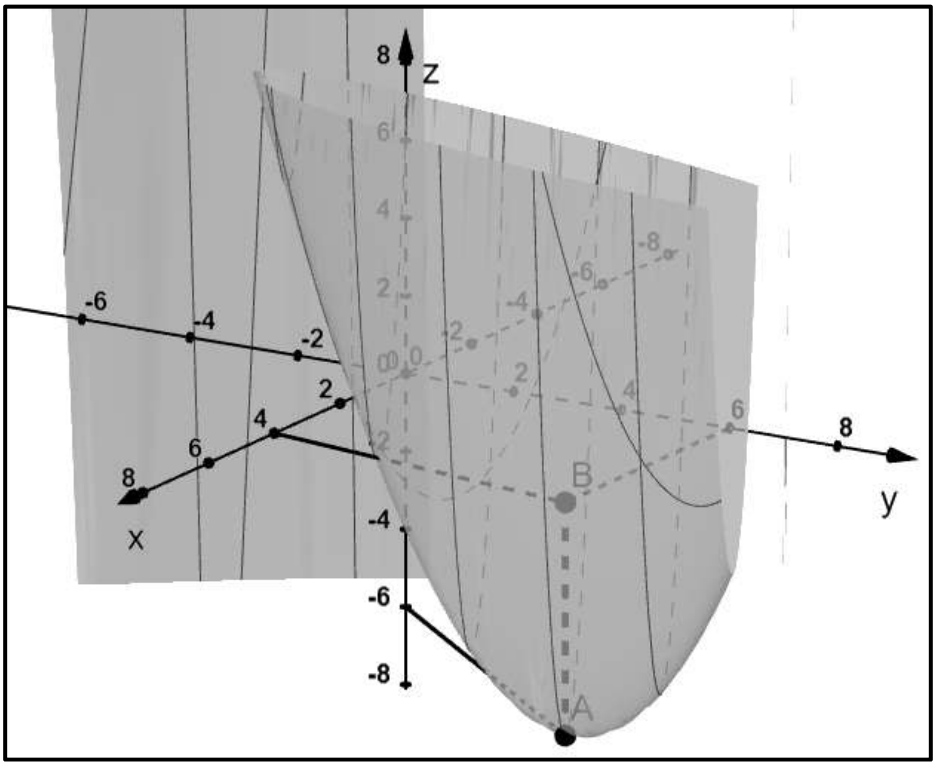


Рис. 2. Поверхня $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 100$, т. $B(5;6)$ - точка мінімума, т. $A(5;6;-6)$ належить поверхні (https://www.geogebra.org/m/ngknpcwq)

9. **Дослідіть функцію $z = x^2 + y^2$ на екстремум, якщо $x + y = 2$. У GeoGebra побудуйте поверхню, яка задана вказаною функцією, лінію умови $\varphi(x,y) = 0$, лінію перетину циліндричної поверхні $\varphi(x,y) = 0$ і поверхні $z = z(x,y)$, позначте знайдені точки.**

○Це задача знаходження умовного екстремума функції. Запишемо функцію Лагранжа і знайдемо її стаціонарні точки. Функція Лагранжа $L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 2)$, її частинні похідні $L'_x(x,y,\lambda) = 2x + \lambda$, $L'_y(x,y,\lambda) = 2y + \lambda$, $L'_\lambda(x,y,\lambda) = x + y - 2$. Складемо і розв'яжемо систему

$$\begin{cases} 2x + \lambda = 0, \\ 2y + \lambda = 0, \\ x + y - 2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\lambda}{2}, \\ y = -\dfrac{\lambda}{2}, \\ -\dfrac{\lambda}{2} - \dfrac{\lambda}{2} - 2 = 0. \end{cases}$$

З останнього рівняння $\lambda = -2$. Враховуючи перші два рівняння, знаходимо стаціонарну точку функції Лагранжа: $M(1;1;-2)$. Знайдемо частинні похідні другого порядку функції Лагранжа. $L''_{xx}(x,y,\lambda) = 2$, $L''_{yy}(x,y,\lambda) = 2$, $L''_{xy}(x,y,\lambda) = 0$. Обчислимо значення цих похідних в точці $M(1;1;-2)$. $L''_{xx}(M) = 2$, $L''_{xy}(M) = 0$, $L''_{yy}(M) = 2$. Повний диференціал другого порядку функції Лагранжа: $d^2L(M) = L''_{xx}(M)dx^2 + 2L''_{xy}(M)dxdy + L''_{yy}(M)dy^2 = 2dx^2 + 2dy^2 = 2(dx^2 + dy^2)$. Оскільки $d^2L(M) > 0$, то точка $M^*(1;1)$ є точкою умовного мінімума функції $z = x^2 + y^2$, $z_{\min\, ум} = 1^2 + 1^2 = 2$. На рис. 3а зображено графік функції $z = x^2 + y^2$, який є параболоїдом. Зрозуміло, що така функція має точку мінімума (0; 0), а мінімум дорівнює 0 (т. A(0; 0; 0)). На рис.3б враховано умову $x + y = 2$ (геометрично – це площина). Площина перетинає параболоїд по параболі (лінія синього кольору) і тут т. B(1; 1; 2) відповідає умовному мінімуму.

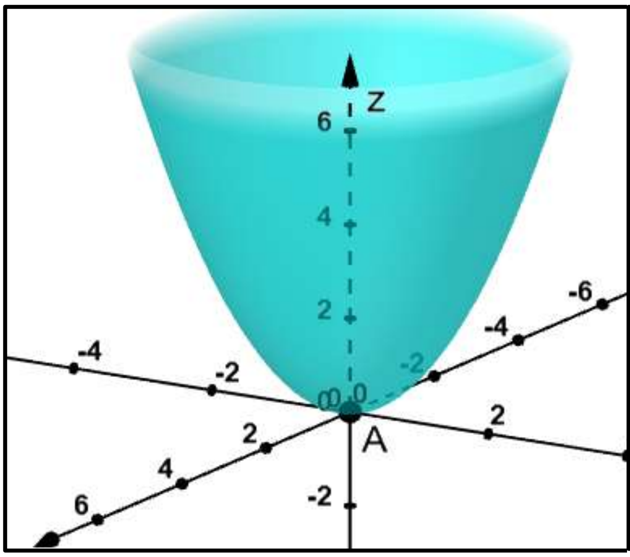


Рис.3а. Графік функції $z = x^2 + y^2$

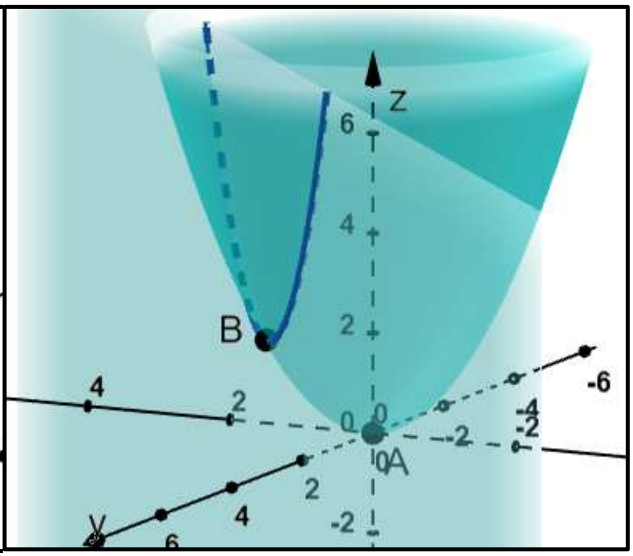


Рис. 3б. Геометрична інтерпретація умовного екстремума

10. **Для функції** $z = x^2 + y^2 - 2xy + 1$ **знайдіть градієнт** $\operatorname{grad} z(A)$**, де** $A(1;-1)$, **обчисліть похідну в точці** ***A*** **за напрямом вектора** $\overrightarrow{AB}$**, де** $B(2;1)$, **запишіть рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці** ***A*****, запишіть рівняння лінії рівня, що проходить через точку** ***A*****. В GeoGebra побудуйте поверхню, дотичну площину, градієнт та лінію рівня.**

○ Знайдемо частинні похідні заданої функції й обчислимо їхнє значення у вказаній точці: $z'_x = 2x - 2y$, $z'_y = 2y - 2x$; $z'_x(A) = 2\cdot 1 - 2\cdot(-1) = 4$, $z'_y(A) = 2\cdot(-1) - 2\cdot 1 = -4$. Тоді $\operatorname{grad} z(A) = (4;-4)$.

Обчислимо координати вектора $\overrightarrow{AB}$ та його напрямні косинуси: $\overrightarrow{AB} = (2-1;1-(-1)) = (1;2)$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Застосуємо формулу $\dfrac{\partial u}{\partial S} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha$, де $\overrightarrow{AB}$ і є напрям *S*.

Тоді $\dfrac{\partial u}{\partial S}(A) = 4\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}} - 4\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}} = -\dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

Для запису рівнянь дотичної площини й нормалі застосуємо формули $f'_x(A)(x - x_0) + f'_y(A)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$ та $\dfrac{x - x_0}{f'_x(A)} = \dfrac{y - y_0}{f'_y(A)} = \dfrac{z - z_0}{-1}$. Обчислимо значення функції $z = x^2 + y^3 - 2xy + 5$ в точці $A(1;-1)$: $z(A) = 1^2 + (-1)^2 - 2\cdot 1\cdot(-1) + 1 = 5$. Тоді $4(x-1) - 4(y+1) - (z-5) = 0$ або $4x - 4y - z - 3 = 0$ - рівняння дотичної площини до поверхні $z = x^2 + y^2 - 2xy + 1$ в точці $C(1;-1;5)$. Рівняння нормалі: $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+1}{-4} = \dfrac{z-5}{-1}$.

Для функції $z = x^2 + y^2 - 2xy + 1$ рівняння ліній рівня мають вигляд $x^2 + y^2 - 2xy + 1 = c$. Врахуємо координати точки $A(1;-1)$: $1^2 + (-1)^2 - 2\cdot 1\cdot(-1) + 1 = c \Rightarrow c = 5$. Отже, рівняння лінії рівня, що проходить через точку $A(1;-1)$ має вигляд $x^2 + y^2 - 2xy - 4 = 0$. На рис. 4 зображено поверхню (блакитним кольором), дотичну площину (сірим кольором), нормаль (синім кольором), точку дотику (точка С), градієнт (вектор $\overrightarrow{OD}$), лінію рівня (дві паралельні прямі, одна з яких проходить через т. *A*, у площині *XOY*).

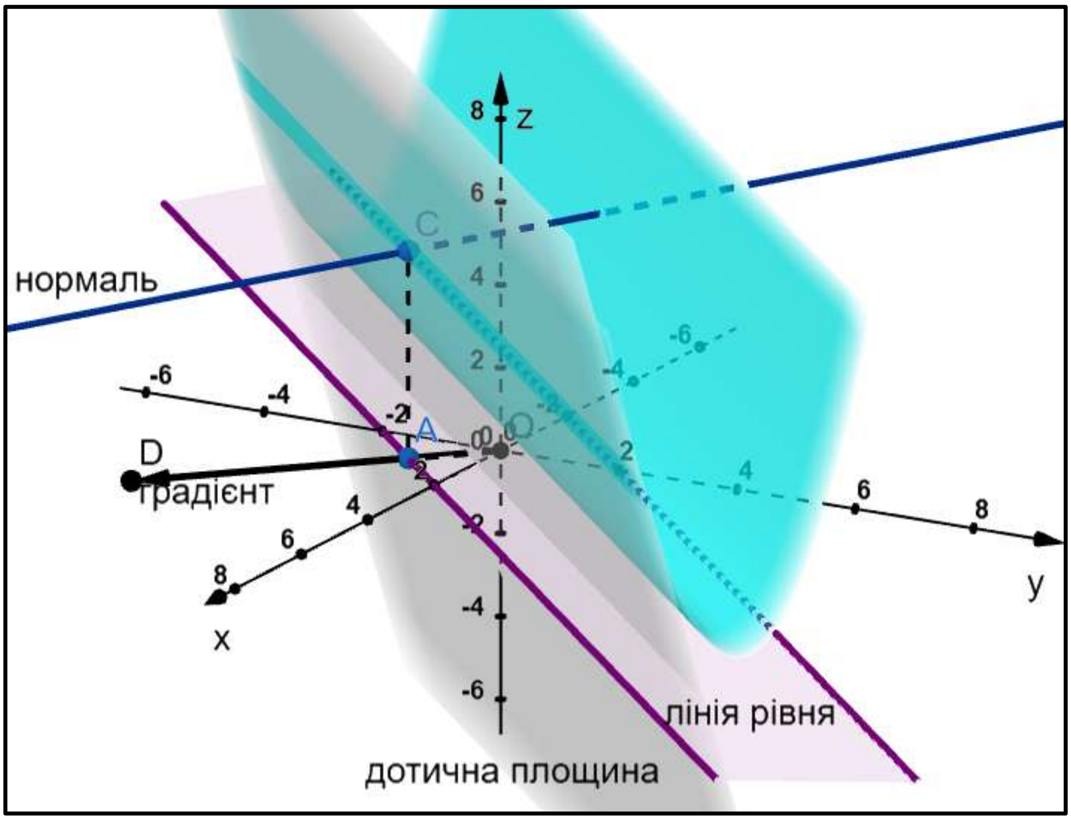


Рис. 4. Геометрична ілюстрація (https://www.geogebra.org/m/sgzqmzvn)

ДОДАТОК А

ТАБЛИЦЯ ПОХІДНИХ ОСНОВНИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c, c – стала	0	$\cos x$	$-\sin x$
$x^k,\ k\in R$	kx^{k-1}	$\sin x$	$\cos x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
a^x	$a^x \ln a$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^x	e^x	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}=\frac{\log_a e}{x}$		

Правила диференціювання

Нехай $u=u(x), v=v(x)$ – диференційовні в точці x функції. Тоді функції $u(x)+v(x), u(x)-v(x)$, $u(x)\cdot v(x), \frac{u(x)}{v(x)}, (v(x)\neq 0)$ також диференційовні в точці x і виконуються рівності

$$(u(x)+v(x))' = u'(x)+v'(x)$$

$$(u(x)-v(x))' = u'(x)-v'(x)$$

$$(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$

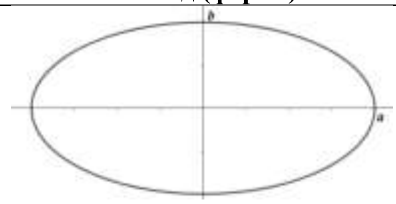
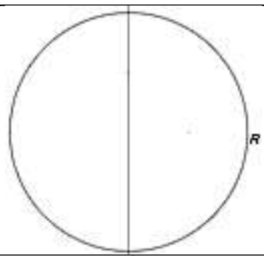
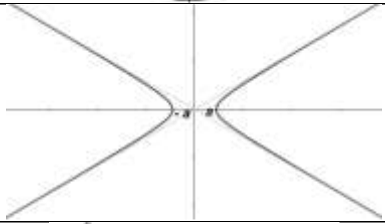
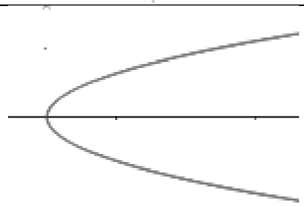
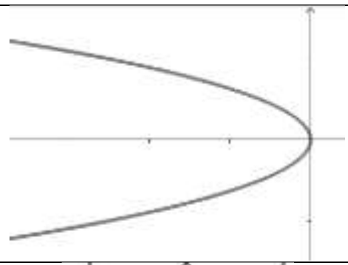
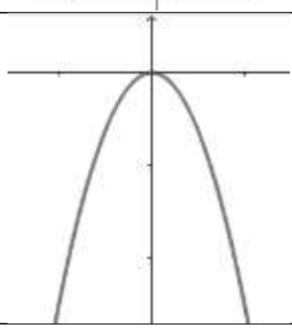
$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}, (v(x)\neq 0)$$

Похідна складеної функції

Якщо функція $\varphi(x)$ має похідну в точці x_0, а функція $f(u)$ – похідну в точці $u_0 = \varphi(x_0)$, то складена функція $y = f(\varphi(x))$ також має похідну в точці x_0 і $y'(x_0) = f'(u_0)\cdot\varphi'(x_0)$.

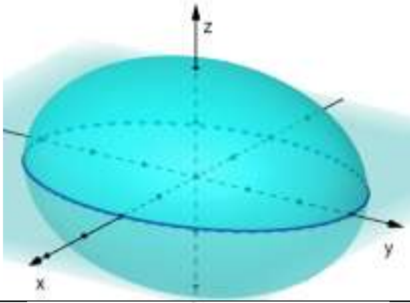
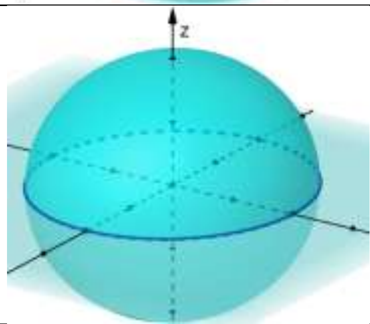
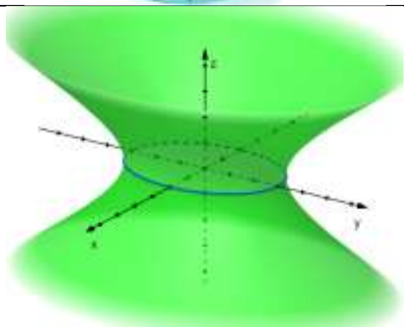
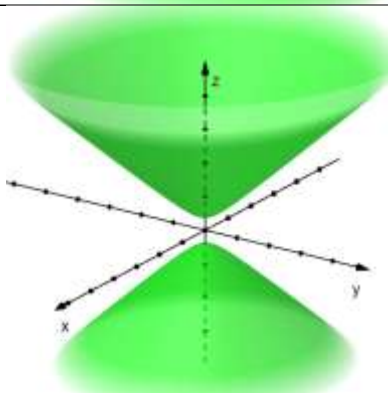
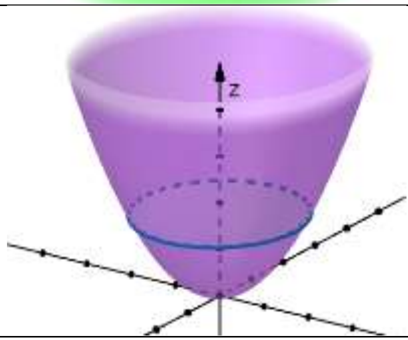
ДОДАТОК Б

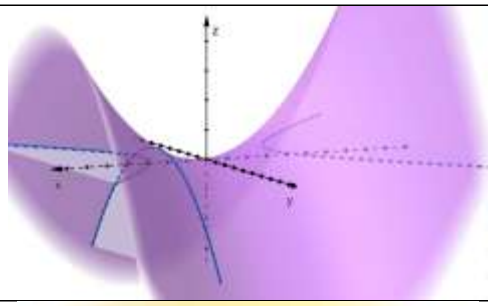
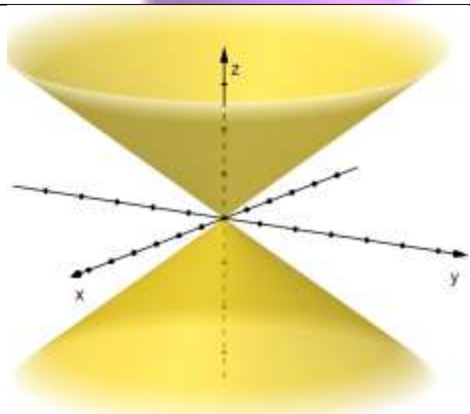
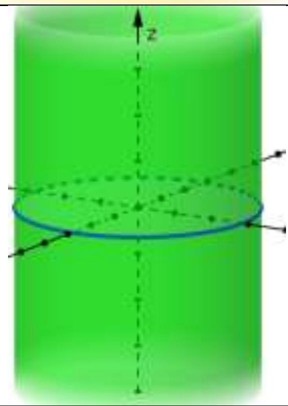
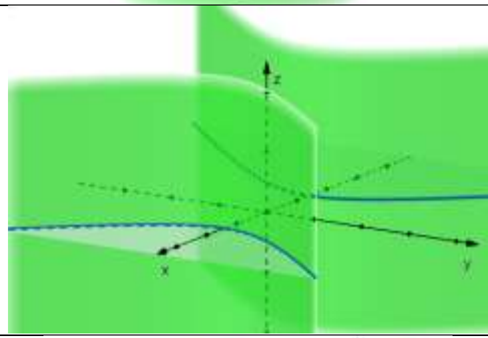
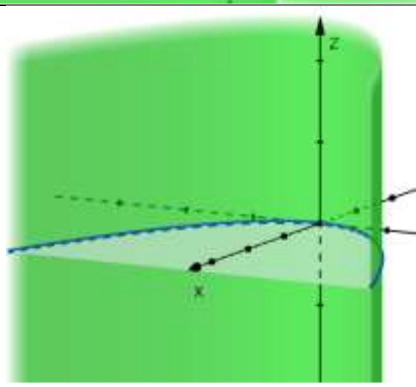
КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Назва	Канонічне рівняння	Вигляд (форма)
Еліпс	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ a та b – півосі еліпса, центр у точці (0;0). Якщо рівняння має вигляд $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, то центр зміщений у точку $(x_0;y_0)$.	
Коло	$$x^2+y^2=R^2$$ Центр у точці (0;0), радіус R. Якщо рівняння має вигляд $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, то центр зміщений у точку (a;b).	
Гіпербола	$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$ Має дві вітки. Прямі $y=\pm\frac{b}{a}x$ – асимптоти.	
Парабола	$$y^2=2px$$ Вершина – в точці (0;0). Якщо рівняння має вигляд $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$, то вершина переміщується в точку $(x_0;y_0)$. Аналогічно для решти 3-х виглядів рівнянь параболи.	
	$$y^2=-2px$$	
	$$x^2=2py$$	
	$$x^2=-2py$$	

ДОДАТОК В

ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Назва	Канонічне рівняння	Вигляд (форма)
Еліпсоїд	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	
Сфера	$x^2+y^2+z^2=R^2$	
Однопорожнинний гіперболоїд	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	
Двопорожнинний гіперболоїд	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	
Еліптичний параболоїд	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz$	

Гіперболічний параболоїд	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz$ ($z=xy$)	
Конус	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	
Еліптичний циліндр	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	
Гіперболічний циліндр	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	
Параболічний циліндр	$y^2=2px$, $y^2=-2px$, $x^2=2py$, $x^2=-2py$	 $y^2=2px$

ДОДАТОК Г

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ВІЗУАЛІЗАЦІЇ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ У СЕРЕДОВИЩІ GEOGEBRA 3D

Інтеграція цифрових технологій у вищу освіту з кожним роком стає поширенішою, особливо у дисциплінах, для яких необхідне складне концептуальне розуміння та динамічна візуалізація, зокрема у математичному аналізі. Ця дисципліна є підґрунтям практично всіх галузей сучасної науки. Однак застосування тільки традиційних методів навчання часто призводить до значних труднощів для здобувачів освіти у розумінні сутності абстрактних понять математичного аналізу через відсутність їхньої динамічної візуалізації. Відтак існує значний розрив між формальним, символічним представленням об'єктів математичного аналізу та їхнім інтуїтивним розумінням, що перешкоджає глибокому засвоєнню матеріалу та його застосуванню. Актуальним є питання про необхідність впровадження інноваційних інструментів, що сприятимуть динамічній візуалізації абстрактних ідеальних понять математичного аналізу, як ефективного засобу для подолання зазначеного розриву шляхом покращення концептуального розуміння абстрактних математичних ідей і понять. Застосування цифрових симуляторів у навчанні сприяє інтерактивній візуалізації і надає дидактичну підтримку, що підвищує розуміння здобувачами освіти змісту навчальної дисципліни, їхню мотивацію, самоефективність й успішність.

Під час вивчення змістового модуля «Диференціальне числення функції кількох змінних» як метод пізнання застосовують аналогію. Так, означення функції, границі й неперервності функції кількох змінних аналогічні до відповідних означень для функції однієї змінної, для знаходження частинних похідних застосовують ті самі правила й таблицю, що й для функції однієї змінної. Водночас варто пам’ятати, що застосування аналогії без критичного аналізу призводить до ризику «сліпого» копіювання властивостей функцій однієї змінної й неправомірного перенесення їх на функції кількох змінних. Крім того, під час переходу від вивчення функції однієї змінної до вивчення функції кількох змінних зменшується рівень наочності і тому для розуміння й усвідомлення абстрактних понять вказаного змістового модуля необхідний достатньо високий рівень розвитку просторової уяви. Покажемо, як за допомогою симуляторів можна подолати (або хоча б зменшити) вказані труднощі.

Для розробки авторських інтерактивних моделей ми обрали систему динамічної математики GeoGebra 3D. Обґрунтування такого вибору: безкоштовність та кросплатформність середовища, наявність потужного інструментарію для 3D-візуалізації в реальному часі, можливість створення інтерактивних моделей із динамічними параметрами, що дозволяє студентам досліджувати математичні об'єкти через активну взаємодію, синергія аналітичного й геометричного представлень математичних об’єктів, що є важливим для формування усвідомленого розуміння змісту цих понять.

Головною метою представлених інтерактивних моделей є перехід від пасивного споглядання статичних графіків до активної, глибокої взаємодії студента з навчальним матеріалом. У середовищі GeoGebra 3D математичні об’єкти перестають бути «застиглими» формулами: змінюючи параметри моделей, обертаючи поверхні чи скануючи їх січними площинами, здобувач освіти не просто візуалізує абстрактні поняття, а й розвиває концептуальне математичне мислення та дослідницьку компетентність. Такий підхід стимулює перехід від механічного засвоєння алгоритмів до усвідомленого розуміння природи математичних явищ, де кожна маніпуляція стає кроком до відкритого самостійного висновку

1. Аплет «Сканування поверхні». Традиційне вивчення ліній рівня часто обмежується аналітичним розв’язанням рівняння $f(x,y)=c$ та побудовою статичних кривих на площині. Для формування усвідомленого розуміння поняття «лінія рівня» доцільно використати інтерактивний тренажер, за допомогою якого здобувач може «сканувати» поверхню. Для створення такої моделі треба: 1) побудувати поверхню; 2) побудувати площину $z=c$ і створити для c повзунок (можна від – 5 до 5 або інші значення), коли студент рухає повзунок, площина піднімається/опускається крізь поверхню; 3) за допомогою команди IntersectPath(f, z = c) побудувати переріз поверхні і площини; 4) створити проєкцію перерізу на площину *XY* за допомогою команди L_floor = ImplicitCurve(f(x, y) - c). Для роботи з інтерактивною моделлю можна перейти за покликанням https://www.geogebra.org/classic/bwekrnmd або відсканувати QR-код (Табл. Г2).

Змінюючи положення повзунка студент наочно спостерігає, як зміна положення січної площини приводить до трансформації лінії рівня на площині *XY*, що ілюструє поняття лінії рівня як проєкції відповідного перерізу (рис. Г1 і рис. Г2).

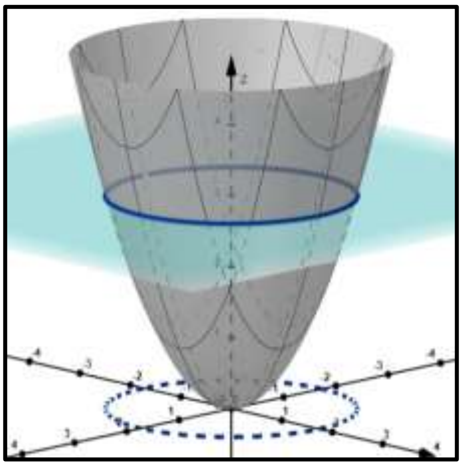


Рис. Г1. Лінія рівня і її проєкція для поверхні $z = x^2 + y^2$ і $c = 3$

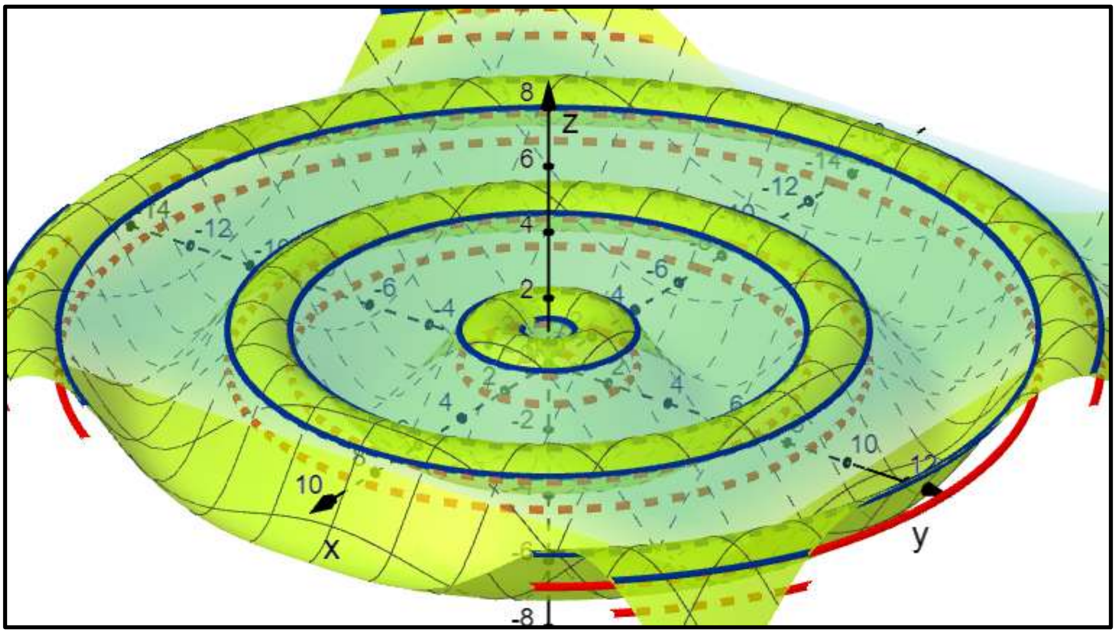


Рис. Г2. Лінії рівня і їхня проєкція для поверхні $z = \sin\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ для c =1

(https://www.geogebra.org/3d/ku4s8he9)

2. Аплети «Дослідження існування границі функції в точці». Одним із найскладніших для розуміння понять у курсі математичного аналізу є границя функції кількох змінних. Основна когнітивна трудність полягає в тому, що на відміну від функції однієї змінної, де точка може наближатися до точки x_0 лише з двох сторін (ліворуч та праворуч), на площині існує нескінченна множина траєкторій наближення до точки (x_0, y_0). Не враховуючи цього факту, здобувачі освіти неправомірно застосовують метод аналогій і часто розглядають лише один шлях наближення точки до граничної. Для попередження цього факту й усунення вказаних труднощів у середовищі GeoGebra 3D було розроблено інтерактивну динамічну модель, що базується на аналізі траєкторій наближення до точки (x_0, y_0) (у нашій моделі – це точка (0; 0)). Оскільки всі математичні команди та алгоритми побудови доступні для детального вивчення у панелі об’єктів (Algebra View) за покликанням https://www.geogebra.org/m/zyw9qvh2 або QR-кодом (Табл. Г2), зупинимося на ключових етапах побудови аплета: 1) побудова об'єкта дослідження – функції $f(x, y)$; 2) створення динамічних траєкторій – прямих $y = kx$ з повзунком для параметра *k*; 3) налаштування руху точок вздовж обраних шляхів із активацією опції «Залишати слід» для точок, які знаходяться на поверхні.

Методика використання моделі будується на послідовному порівнянні тих значень, до яких наближається *z*, якщо змінювати за допомогою повзунка для параметра *k* траєкторію наближення точки по прямій $y = kx$ до точки (0; 0). Так, для *k* = 0 (наближення вздовж осі *OX*) точка *P* (зображена зеленим кольором) на поверхні рухається траєкторією з незмінною аплікатою *z* = 0. Це створює у студента первинну ілюзію існування границі в точці (0; 0): границя існує і рівна 0 (рис. Г3).

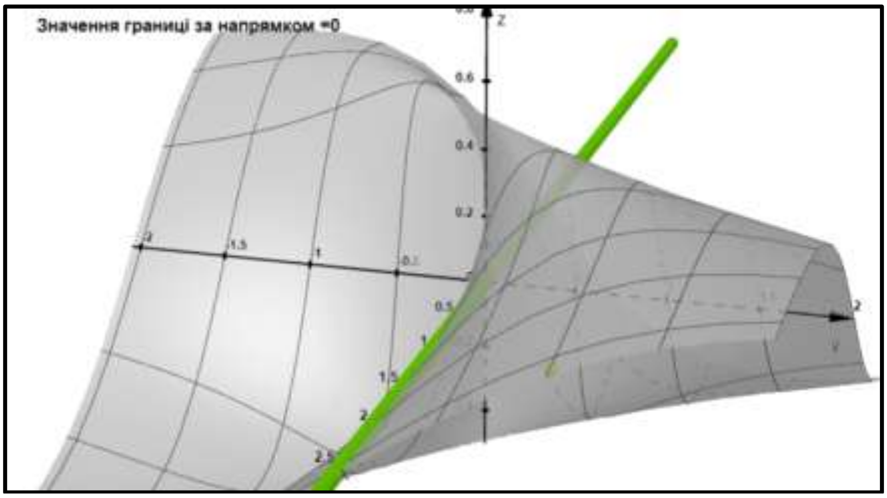


Рис. Г3. Траєкторія руху точки P по поверхні $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ для $k=0$

Зміна значення параметра k=1 (рух вздовж бісектриси $y=x$), k=-1а потім миттєво змінює положення точки P, яка тепер «зависає» на висоті $z=0.5$ і $z=-0.5$. Ці стрибки фіксуються в динамічному тексті «Значення границі за напрямком», створюючи когнітивний конфлікт: наближення до точки (0; 0) по різних прямих дає різні результати (рис. Г4). Враховуючи зміст теореми про єдиність границі, здобувач робить висновок, що не існує $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

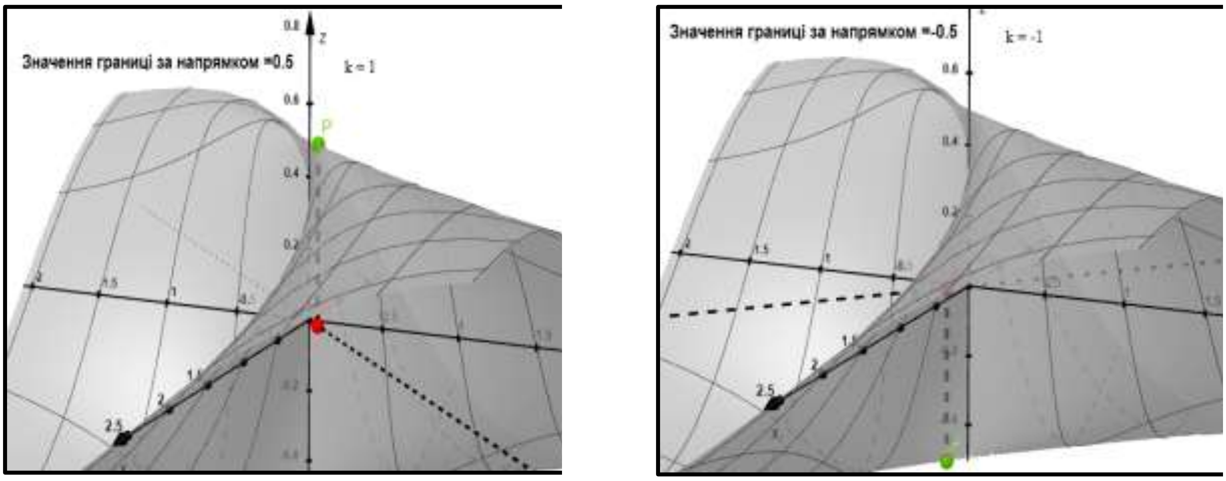


Рис. Г4. Ілюстрація зміни положення точки P

На нашу думку, важливим моментом методики є використання інструменту «показати слід» для точки P. На рис. Г5 продемонстровано результат варіювання параметра k при наближенні точки (0; 0). Як бачимо, незалежно від того, наскільки «близько» підходимо до точки (0;0), значення функції не наближаються до одного й того самого числа.

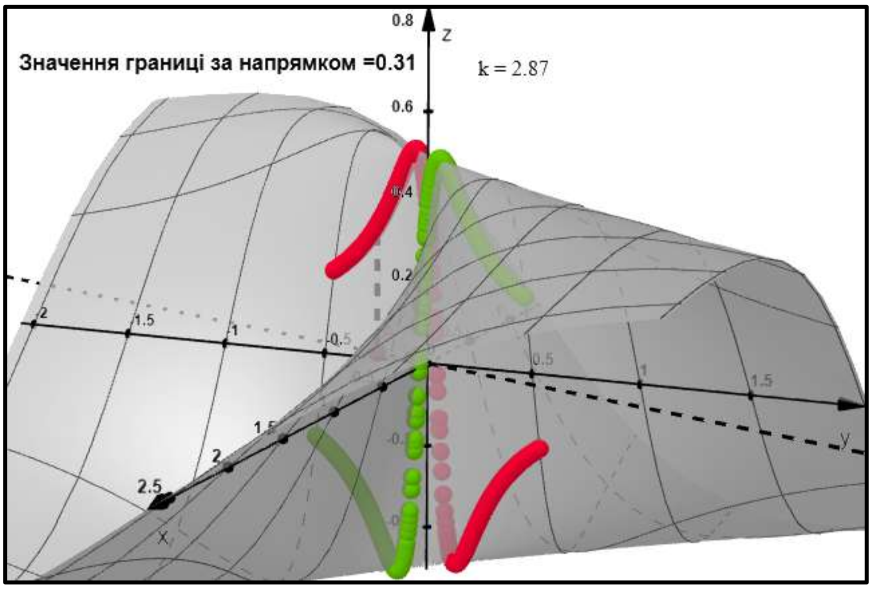


Рис. Г5. Візуалізація неіснування границі функції $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ в точці (0; 0)

Особливу методичну цінність становлять функції, для яких дослідження границі вздовж будь-якої прямої $y=kx$ дає однаковий результат, що може призвести до хибного висновку про існування границі функції в точці. Наприклад, для функції $f(x,y)=\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ границя в точці (0; 0) вздовж усіх прямих $y=kx$ дорівнює 0:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3(kx)}{x^6+(kx)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^4}{x^6+k^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^4+k^2}=0\,.$$

Для виявлення «прихованої» поведінки функції створена інтерактивна модель (https://www.geogebra.org/m/kkpwbvse) (рис. Г6). Методика дослідження за допомогою розробленого аплету включає: 1) аналіз поведінки функції у випадку наближення до точки (0; 0) по прямих (студент змінює значення параметра k для $y=kx$ прямих і бачить, що в усіх випадках точка P, яка рухається по поверхні (траєкторія червоного кольору), приходить у точку (0; 0; 0). Це створює хибне враження, що границя існує і дорівнює 0; 2) зміна траєкторії на кубічну параболу (якщо точка B наближається до точки (0; 0) вздовж кубічної параболи $y=x^3$, то рух точки M відбувається вздовж «гребеня» поверхні (траєкторія помаранчевого кольору)). У цьому випадку значення функції дорівнює 0.5: $f(x,x^3)=\dfrac{x^3\cdot x^3}{x^6+(x^3)^2}=\dfrac{x^6}{2x^6}=0{,}5$. Отже, і границя функції в точці (0; 0) мала би бути рівна 0,5; 3) наочне розходження траєкторій у точці (0; 0) на висоту $z=0$ та $z=0{,}5$ ілюструє неіснування $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$.

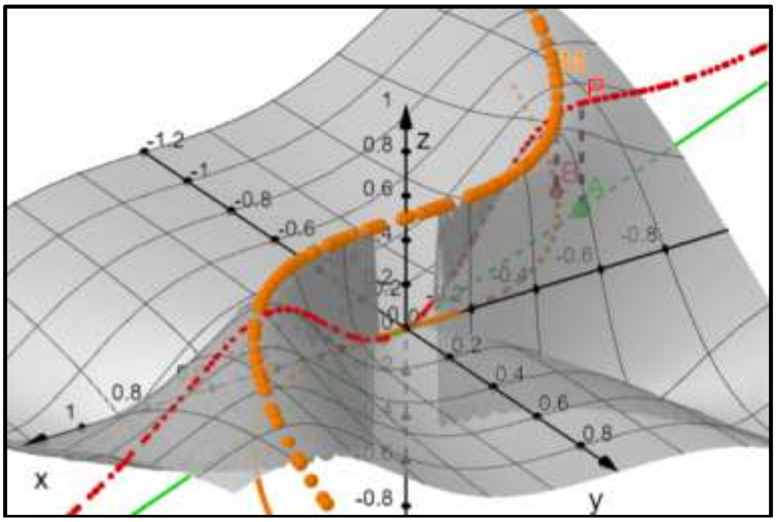


Рис. Г6. Візуалізація неіснування $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$

Варто зауважити, що розроблені інтерактивні моделі мають подвійне методичне призначення: вони можуть бути використані не лише для дослідження існування границі функції кількох змінних в точці, а й для дослідження функції на неперервність у точці, оскільки одна із умов неперервності – існування границі функції в точці.

3. Аплет «Геометричний зміст частинних похідних». Для вивчення цього питання пропонуємо організувати домашню самостійну роботу здобувачів освіти, оскільки з геометричним змістом похідної функції однієї змінної студенти вже ознайомлені (за потреби знання здобувачів можна актуалізувати на відповідній лекції). Доцільно запропонувати таку інструкцію для виконання цієї роботи:

Етап 1. Створення динамічної бази

1. Задайте функцію двох змінних**.** У рядок вводу введіть, наприклад: $f(x, y) = 0.5(x^2 + y^2)$. Результат – поверхня параболоїд.

2. Створіть керуючі повзунки. Створіть два повзунки *x*_0 та *y*_0 (діапазон можна взяти від – 5 до 5) для керування координатами точки.

3. Побудуйте точку A на поверхні. Введіть: A = (*x*_0, *y*_0, *f*(*x*_0, *y*_0)). Тепер разом з рухом повзунків точка буде «ковзати» по графіку.

Етап 2. Побудова вертикального перерізу

4. Створіть січну площину. Оскільки досліджуємо геометричний зміст f'_x, то фіксуємо *y*. Введіть: eq1: y = y_0.

5. Отримайте криву перетину. Використайте команду: c_x = IntersectPath(f, eq1). Результат – крива (тут парабола), що лежить у вертикальній площині.

Етап 3. Побудова дотичної

6. Побудуйте напрямний вектор дотичної. Введіть: v = Vector((1, 0, k)).

7. Проведіть дотичну. Введіть: t = Line(A, v). Пряма t тепер є дотичною до кривої c_x у точці A.

Етап 4. Вимірювання

9. Побудуйте кут нахилу. Створіть допоміжну горизонтальну пряму: h = Line(A, Vector((1, 0, 0))). Оберіть інструмент «Кут» та натисніть на дотичну t і пряму h.

10. Виведіть результат на екран**.** Оберіть інструмент «Текст» і у вікні введіть: «Тангенс кута нахилу = k».

Етап 5. Обчислення й порівняння

11. Обчисліть частинну похідну заданої функції по змінній *x* та її значення в точці A = (*x*_0, *y*_0).

12. Порівняйте це значення зі значенням у вікні «Тангенс кута нахилу = k». Результати занесіть в таблицю Г1.

Етап 6. Висновок

13. За допомогою повзунка змініть положення точки A. Повторіть зміну точки A 6 разів, записуючи результати в таблицю 1. Зробіть і запишіть висновок.

Таблиця Г1

Результати вимірювань і обчислень

k	$f'_x(x\_0, y\_0)$	k	$f'_x(x\_0, y\_0)$
2	2		
Висновок:			

Етап 7. Творчий

14. Змініть пункти пропонованої інструкції так, щоб отримати аплет для ілюстрації геометричного змісту f'_y

15. Отримавши відповідне зображення, виконайте етапи 5 і 6 цієї інструкції.

За результатами виконання пунктів 1 – 13 цієї інструкції здобувачі освіти мають отримати зображення (рис. Г7).

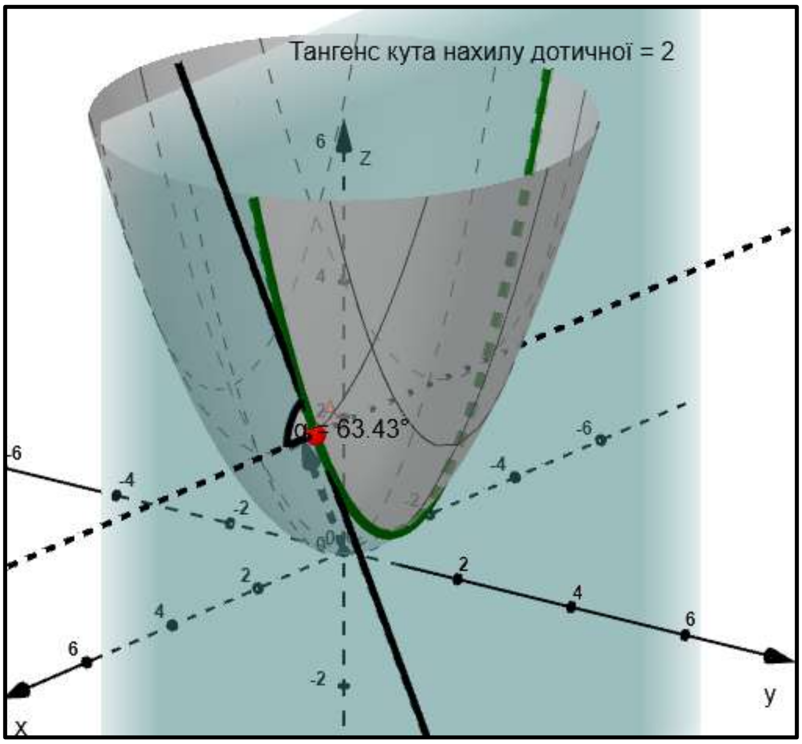


Рис. Г7. Геометрична інтерпретація частинної похідної по змінній *x* функції двох змінних
(тут – $f(x, y) = 0.5(x^2 + y^2)$) (https://www.geogebra.org/3d/sa28mdua)

Аплет 4. «Дослідження існування локального екстремуму функції з параметром». Для поглиблення розуміння достатніх умов існування екстремуму та природи критичних точок функції двох змінних розроблено аплет (https://www.geogebra.org/m/sax3yvvj), що базується на дослідженні параметричного сімейства функцій вигляду $f(x, y) = x^2 + ay^2$. Використання параметра *a* створює для студентів можливість спостерігати динамічну трансформацію поверхні та класифікувати критичні точки не лише аналітично, а й візуально.

Методика застосування цієї інтерактивної моделі:

1. Додатне значення параметра ($a > 0$): Здобувач встановлює повзунок у положення $a > 0$ (наприклад, $a = 1$). Поверхня – еліптичний параболоїд. Точка (0; 0; 0) візуально є «найнижчою» точкою поверхні. Здобувач висуває гіпотезу, що існує локальний мінімум в точці (0; 0) і він дорівнює 0 (рис. Г8). Для підтвердження або спростування гіпотези доцільно провести аналітичні обчислення (знайти критичні точки, записати матрицю Гессе, застосувати достатні умови існування локального екстремума функції кількох змінних).
2. Вироджений випадок ($a = 0$): Разом зі зміною параметра до 0 поверхня трансформується у параболічний циліндр $z = x^2$. Здобувач спостерігає, що замість ізольованої точки мінімуму утворюється лінія «найнижчих» точок (вісь *Oy*), що візуалізує випадок, коли достатні умови не дають відповіді про наявність екстремуму (головний визначник матриці Гессе дорівнює нулю) (рис. Г9).
3. Від'ємне значення параметра ($a < 0$): Подальше зменшення параметра (наприклад, $a = -1$) приводить до того, що поверхня набуває форми гіперболічного параболоїда («сідла»). Хоча в точці (0; 0) частинні похідні дорівнюють нулю, наочно видно, що в одному напрямку функція зростає, а в іншому – спадає. Це дає чітке геометричне пояснення поняттю «сідлова точка» (рис. Г10).

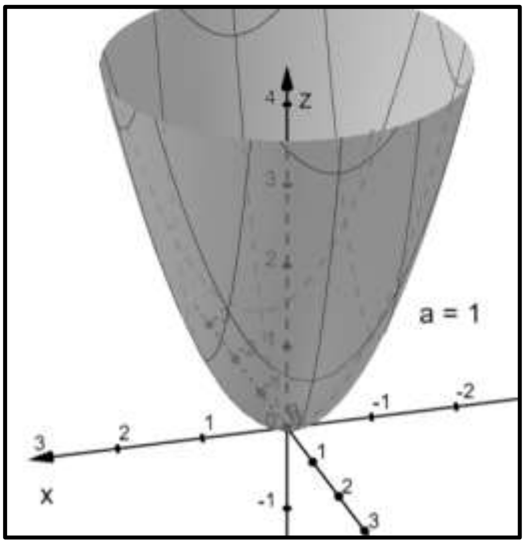


Рис. Г8. Візуалізація локального мінімуму для a = 1 (еліптичний параболоїд)

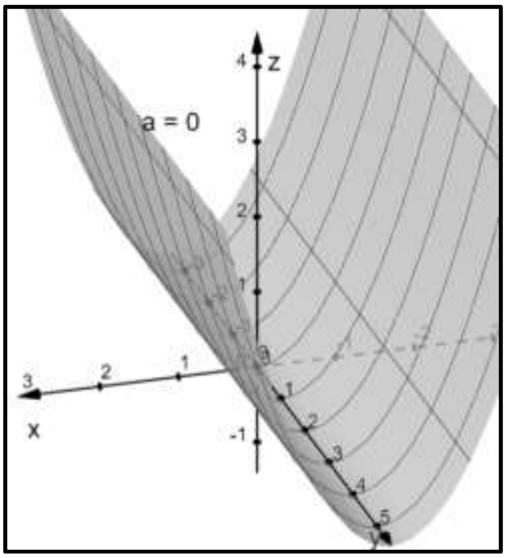


Рис. Г9. Перехідний стан поверхні для a = 0 (параболічний циліндр)

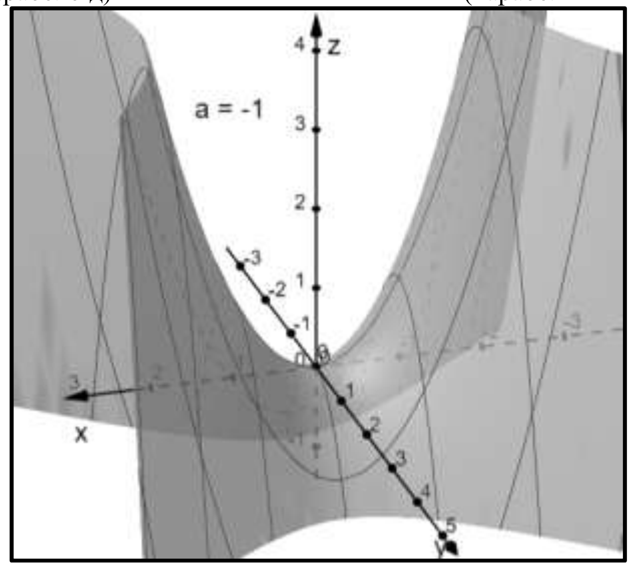


Рис. Г10. Геометрична інтерпретація «сідлової» точки для a = – 1 (гіперболічний параболоїд)

Таблиця Г2

Перелік інтерактивних моделей для підтримки вивчення диференціального числення функцій кількох змінних

Назва розробки	QR-код	GeoGebra 3D
Сканування поверхні_1		https://www.geogebra.org/classic/bwekrnmd
Сканування поверхні_2		https://www.geogebra.org/3d/ku4s8he9
Дослідження існування границі функції в точці_1		https://www.geogebra.org/m/zyw9qvh2

Дослідження існування границі функції в точці_2		https://www.geogebra.org/m/kkpwbvse
Геометричний зміст частинних похідних		https://www.geogebra.org/3d/sa28mdua
Дослідження існування локального екстремуму функції з параметром		https://www.geogebra.org/m/sax3yvvj

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ Й ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Основна (підручники та посібники)

1. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : навч. посіб. Київ : А.С.К. 2013. 648 с. Режим доступу: https://fpk.in.ua/images/biblioteka/1bac_pravo/dubovik-vp-yurik-vischa-matematika_a4932a8da7f-.pdf
2. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: Підручник: У 2-х ч. Ч. 2. Київ: Либідь. 2003. 304 с. Режим доступу: https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Dorogovtsev_P2_1994_304.pdf
3. Lebl J. Basic Analysis II: Introduction to Real Analysis, Volume II. Oklahoma: Jiří Lebl / University of Oklahoma. 2024. 244 p. P. 131–190. Режим доступу: https://www.jirka.org/ra/realanal2.pdf
4. Шкіль М.І. Математичний аналіз: Підручник. У 2-х ч. Ч.2. 3-є видання, переробл. і доп. Київ: Вища школа. 2005. 510 с. Режим доступу: https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Shkil_P2_2005_510.pdf

Практикуми та збірники задач

5. Вища математика: Збірник задач / за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. Київ : А.С.К. 2004. 480 с.
6. Диференціальне та інтегральне числення функцій кількох змінних. Диференціальні рівняння. Практикум. (І курс ІІ семестр) / Уклад.: І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова. Київ: НТУУ «КПІ», 2016. 188 с.
7. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Котлова В.М. Вища математика: диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних, диференціальні рівняння. Київ: Либідь, 1994. 206 с.

Методична та наукова література

8. Sierpinska A. Understanding in Mathematics. London : The Falmer Press, 1994. 214 p.
9. Кугай Н. В. Методика використання інтерактивних моделей GeoGebra 3D як засобу забезпечення концептуального розуміння диференціального числення функцій кількох змінних. Вісник Глухівського національного педагогічного університету імені Олександра Довженка. Серія: Педагогічні науки. 2026 р. Вип. 60, с. 53-61. https://doi.org/10.31376/2410-0897-2026-1-60-53-61.
10. Кугай Н. В., Калініченко М. М. Формування вмінь майбутніх учителів математики застосовувати метод аналогій у процесі навчання дисциплін математичного спрямування. Фізико-математична освіта. 2019. Вип. 1. С. 88-94.
11. Оленюк О., Семенишена Р., Дуганець В. Ефективність використання віртуальних симуляторів у STEM-освіті. *Сучасна освіта України: проблеми, досвід, перспективи*, 2024. с. 115-123 DOI: https://doi.org/10.30525/978-9934-26-422-1-12
12. Семеніхіна О. Теорія і практика формування професійної готовності майбутніх учителів математики до використання засобів комп’ютерної візуалізації математичних знань. Дис. д. пед. наук, Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Суми, 2017.
13. Семеніхіна О., Білошапка Н. Про використання вчителями математики засобів комп’ютерної візуалізації. *Гуманізація навчально-виховного процесу*, 2018. № 1 (87). С. 289-301. doi: https://doi.org/10.31865/2077-1827.1(87)2018.140455
14. Коваль Т., Бесклінська О. Використання засобів візуалізації для створення електронних освітніх ресурсів у процесі навчання математичних дисциплін у закладах вищої освіти. *Інформаційні технології і засоби навчання*, т. 77, №3, С. 145-161, 2020. doi: 10.33407/itlt.v77i3.3411.

Інформаційні ресурси

15. GeoGebra : офіційний сайт. URL: https://www.geogebra.org.
16. Wolfram|Alpha: Computational Intelligence : інтелектуальна система знань. URL: https://www.wolframalpha.com.

Електронне видання

Кугай Наталія Василівна

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

(практикум)

Навчально-методичний посібник

Для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «Бакалавр» освітньо-професійних програм «Середня освіта (Математика та інформатика)», «Середня освіта (Фізика та інформатика)», «Середня освіта (Інформатика)»; вчителям і викладачам математики різних закладів освіти.

Підп. до розповсюдження 29.04.2026.
Формат 60х84/8. Умов. друк. арк. 8,02. Зам. №3567
Облік.-вид. арк. 5,20. Папір офсетний. Гарнітура Таймс.
Видавництво Глухівського національного педагогічного
університету імені Олександра Довженка.
41400, м. Глухів, Сумська обл., вул. Київська, 24,
тел/факс (05444) 2-33-06.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК No678 від 19.11.2001.